KTH Teoretisk Fysik

Tentamen i **5A1301/5A1305 Fysikens matematiska metoder**

Fredagen den 20 oktober 2006, kl 08:00-13:00

Anteckna på varje blad: namn, utbildningslinje, årskurs och problemnummer.
Notera på första tentabladet om du har hemtal tillgodo från tidigare kurs, och vilken termin kursen gick!

Tillåtna hjälpmedel:	1) Teoretisk fysiks formelsamling
	2) BETA
	3) NBS Handbook of Mathematical Functions
	4) Josefsson, Formel- och tabellsamling i matematik
	5) Tefyma
	6) Spiegel, Mathematical Handbook
	7) Zwillinger, CRC Standard Mathematical Tables and Formulae
	Obs! Miniräknare är ej tillåten.
Examinator:	Edwin Langmann (tel: 5537 8173 epost: langmann@kth.se)
Lösningsföreslag:	Kommer att finnas på kurshemsidan,
	`http://courses.physics.kth.se/5A1305/`
Motivera utförligt!	Otillräckliga motiveringar medför poängavdrag.
	Inför och förklara själv konstanter och symboler du behöver!

---

1. (a) Bestäm lösningen $u = u(x, y)$ till Laplaces ekvation $\Delta u = 0$ inom rektangeln $0 < x < a$ och $0 < y < b$ med följande randvillkor[1]

$$u_x(0, y) = u_x(a, y) = 0, \quad u(x, 0) = C \sin^2(\pi x/a), \quad u(x, b) = C \cos^2(\pi x/a)$$

där $C > 0$; x, y är kartesiska koordinater (2p).

(b) Ange en rimlig fysikalisk tolkning av problemet ovan. Ditt svar skall vara till större delen formulerat i ord och så detaljerad att den matematiska modellen ovan är entydig specificerad (1p).

Ledning: Full poäng för (a) kräver att alla Fourierkoefficienter beräknas.

2. (a) Bestäm den funktion $f(z, t)$ för $0 < z < L$ och $t > 0$ som uppfyller

$$f_t(z, t) - a f_{zz}(z, t) = \frac{Q}{t_0} \mathrm{e}^{-t/t_0} \delta(z - L/2)$$

och

$$f(0, t) = f_z(L, t) = f(z, 0) = 0;$$

$L > 0$, $a > 0$, $Q > 0$ och $t_0 > 0$ är konstanter (2p).

(b) Kompletera i detalj följande fysikalisk tolkning av modellen i (a): *"Problemet i (a) ovan modellerar en tunn cylindrisk stav som är isolerad på mantelytan och ..."*. Dessutom skall du förfina den matematiska modellen i (a) för att beskriva den mer realistiska situationen där mantelytan inte är perfekt isolerad men Newtons avsvalningslag gäller,

[1] Vi använder notationen $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, osv.

dvs., normalkomponenten av vämeströmmen på mantelytan är proportionell mot skillnaden mellan rand- och omgivningstemperaturen; annars är situationen samma som i (a) (1p).

Ledning: Fysikaliska tolkningen i (b) skall till större delen vara formulerat i ord och så detaljerad att modellen är entydig specificerad (glöm inte att förklara *alla* matematiska symboler, inklusive $z, t, a \ldots$). Obs. att temperaturen i den generaliserade modellen i (b) inte längre är oberoende av normalavståndet r från cylinderaxeln. Du behöver INTE lösa denna generaliserade modell.

3. (a) Ett cirkulärt och homogent membran är fast inspänt på randen $r = R$ och befinner sig i viloläget. Vid tiden $t = 0$ få membranet ett slag som är jämnt fördelat över hela membranytan. Bestäm tidsutvecklingen av membranets amplitud efter slaget (2p).

(b) Beräkna membranets grundvinkelfrekvens (1p).

Ledning: Slaget i (a) kan t.ex. modelleras genom att anta att membranets hastighet är lika med en konstant $v_0 > 0$ vid tiden $t = 0$ där pulsen sker ("t.ex." därför att man kan modellera slaget också på ett annat, ekvivalent sätt).

4. (a) En mycket lång homogen cylinder med radien R och värmeledningsförmågan λ värms upp av en strömgenomfluten tråd som befinner sig i centrum $r = 0$ av cylindern (r, θ är cylinderkoordinater). Tråden utvecklar en konstant värmemängd q (i W/m), och temperaturen på cylinderytan är $T_0 \cos(2\theta)$ där $T_0 > 0$. Bestäm den stationära temperaturfördelningen inom cylindern (2p).

Ledningar: Du kan anta att cylindern är oändligt lång.

(b) Ange definitionen av Greenfunktionen G till problemet i **2.** (a) (dsv. värmeledning i en tunn cylindrik stav). Definitionen skall innehåller alla ekvationer som behövs för att bestämmer G entydig (1p).

5. (a) Bestäm snabbaste vägen i xy-planet mellan punkterna $(x, y) = (0, 0)$ och $(x, y) = (a, 0)$ om beloppet av hastigheten v beror på positionen enligt $v(x, y) = c|y|$ (oberoende av x); $a > 0$ och $c > 0$ är konstanter, $|y|$ är beloppet av y, och x, y är kartesiska koordinater (2p).

(b) Bestäm snabbaste vägen i xy-planet mellan punkten $(x, y) = (0, 0)$ och linjen $x = a > 0$ (parallel med y-axeln); hastigheten är som i (a) ovan (1p).

Anmärkning i fall du undrar om problemen ovan är välformulerat: hastigheten ovan kan uppfattas som gränsvärdet $v_0 \to 0$ av $v(y) = \sqrt{v_0^2 + (cy)^2}$: det är inte självklart att gränsvärdet existerar och att det är möjlig att räkna direkt med $v_0 = 0$ (som är enklare), men räkningen visar att det är så.

LYCKA TILL!

Lösningsföreslag till FYSMAT Tentamen den 20 oktober 2006

1. (a) Vi utveckla funtionen u egenfunktioner $f = f_n$ som löser problemet

$$-f''(x) = k^2 f(x), \quad f'(0) = f'(a) = 0,$$

i.e.,

$$f_n(x) = \cos(k_n x), \quad k_n = n\frac{\pi}{a}, \quad n = 0, 1, 2, 3 \ldots.$$

Detta ger

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y) \cos(k_n x)$$

där koefficienterna $a_n(y)$ uppfyller

$$a_n''(y) - k_n^2 a_n(y) = 0, \quad a_n(0) = A_n, \quad a_n(b) = B_n$$

där

$$C \sin^2(\frac{\pi x}{a}) = \frac{C}{2}(1 - \cos(\frac{2\pi x}{a})) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(k_n x)$$

och

$$C \cos^2(\frac{\pi x}{a}) = \frac{C}{2}(1 + \cos(\frac{2\pi x}{a})) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(k_n x),$$

dvs.,

$$A_0 = B_0 = -A_2 = B_2 = \frac{C}{2} \text{ och } A_n = B_n = 0 \text{ annars }.$$

Detta ger

$$a_n(y) = c_n \cosh(k_n y) + \tilde{c}_n \sinh(k_n y)$$

där $c_n = A_n$, $c_n \cosh(k_n b) + \tilde{c}_n \sinh(k_n b) = B_n$, dvs.,

$$a_n(y) = A_n \cosh(k_n y) + (B_n - A_n \cosh(k_n b)) \frac{\sinh(k_n y)}{\sinh(k_n b)}.$$

Svar:

$$u(x, y) = \frac{C}{2} - \frac{C}{2} \cos(2\pi x/a) \left(\cosh(2\pi y/a) - (1 + \cosh(2\pi b/a)) \frac{\sinh(2\pi y/a)}{\sinh(2\pi b/a)} \right).$$

(b) Stationär temperatur i ett rekangulär område $0 < x < a$ och $0 < y < b$ (dvs., ett homogen kropp isolerad i två parallela väggor parallel med xy-planet så att temperaturen är oberoende av z), där väggorna $x = 0$ och $x = a$ är värmeisolerade och väggorna $y = 0$ och $y = b$ har fixerade temperaturfördelningar $C \sin^2(\pi x/a)$ och $C \cos^2(\pi x/a)$.

2. Problemet har homogena randvillkor men en inhomogen PDE: vi utveckla funktionen $f(z, t)$ i egenfunktioner $g = g_n(z)$ av problemet

$$-g''(z) = k^2 g(z), \quad g(0) = 0, \quad g'(L) = 0,$$

dvs.,

$$g_n(z) = \sin(k_n z), \quad k_n = (n - \frac{1}{2})\frac{\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Detta ger

$$f(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\sin(k_n z)$$

där

$$c_n'(t)+ak_n^2c_n(t)=h_n(t),\quad c_n(0)=0$$

och

$$h_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^L \sin(k_n z)\frac{Q}{t_0}\mathrm{e}^{-t/t_0}\delta(z-L/2)dz=\frac{2Q}{Lt_0}\sin(k_nL/2)\mathrm{e}^{-t/t_0}.$$

ODE ovan har en partikulärlösning $(c_n)_{part}(t)=C_n\mathrm{e}^{-t/t_0}$ där

$$\left(-\frac{1}{t_0}+ak_n^2\right)C_n=\frac{2Q}{Lt_0}\sin(k_nL/2),$$

och en enkel räkning ger

$$c_n(t)=C_n(\mathrm{e}^{-t/t_0}-\mathrm{e}^{-ak_n^2t}).$$

<u>Svar:</u>

$$f(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2Q}{Lt_0}\sin(k_nL/2)\sin(k_nz)\frac{1}{-\frac{1}{t_0}+ak_n^2}(\mathrm{e}^{-t/t_0}-\mathrm{e}^{-ak_n^2t}),\quad k_n=(n-\frac{1}{2})\frac{\pi}{L}.$$

Anmärkning: Lösningen kan förenklas lite med $\sin(k_nL/2)=+1/\sqrt{2}$ om $n=4m-3$ och $n=4m-2$ och $\sin(k_nL/2)=-1/\sqrt{2}$ om $n=4m-1$ och $n=4m$ där $m=1,2,3\ldots$. OBS att lösningen är även väldefinierad om $1/t_0=ak_n^2$ (resonans), men då måste man tolka singulära termen som gränsvärd $1/t_0\to ak_n^2$ och använda l'Hospitals regel.

(b) $f(z,t)$ är temperaturen i positionen z och vid tiden t där $L>0$ är längden av staven. Staven är cylindrisk och perfekt temperaturisolerad vid mantelytan $r=R$ och topskivan $z=L$ (r och z är cylinderkoordinater), och temperaturen vid bottonskivan $z=0$ hålls vid konstant tempertur 0. Staven har konstant temperatur 0 i början och värms upp av en värmekällan lokaliserad i punkten $z=L/2$ och som avtar exponentiell med tiden; $q=Q/\lambda$ (= integralen över källtätheten över hela rummet och alla tider delat med värmeledningsförmågan λ) är lika med hela värmemängden som tillförs, och a är värmediffusiviteten.

Om mantelytan $r=R$ inte är perfekt isolerad så gäller

$$-\lambda\mathbf{n}\cdot\nabla f_{r=R}=-\alpha(T_0-f|_{r=R})$$

där T_0 är omgivningstemperaturen, λ värmeledningsförmågan, och α värmeövergångskoefficienten. Temperaturen kan därför bestämmas som funktion $f=f(r,z,t)$, $0\le r\le R$, $0\le z\le L$, $t>0$ (vi kan anta att f är oberoende av vinkeln θ) som uppfyller

$$f_t-a\left(\frac{1}{r}(rf_r)_r+f_{zz}\right)=h,\quad h(r,z,t)=\frac{Q}{R^2\pi t_0}\mathrm{e}^{-t/t_0}\delta(z-L/2)$$
$$-\lambda f_r(R,z,t)=\alpha(f(R,z)-T_0),\quad f(r,0,t)=f_z(r,L,t)=0,\quad f(r,z,0)=0 \tag{1}$$

där $|f(0,z,t)|<\infty$.

3. Membranens amplitud $u=u(r,\theta,t)$, $0\le r\le R$, $0\le\theta\le 2\pi$ är cylinderkoordinater och $t>0$ tiden, uppfyller vågekvationen

$$u_{tt}-c^2\left(\frac{1}{r}(ru_r)_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right)=0,$$

med följande randvillkor

$$u(R,\theta,t) = 0, \quad |u(0,\theta,t)| < \infty,$$

och följande begynnelsevillkor

$$u(r,\theta,0) = 0, \quad u_0(r,\theta,t=0) = v_0.$$

Problemet är rotationssymmetrisk, och $u = u(r,t)$ är oberoende av θ.

Vi utveckla $u(r,t)$ i egenfunktioner $f = f_s(r)$ som uppfyller

$$-(1/r)(rf'(r))' = k^2 f(r), \quad f|_{r=R} = 0, \quad |f(0)| < \infty$$

dvs.,

$$f_s(r) = J_0(k_s r), \quad k_s = \frac{\alpha_{0,s}}{R}, \quad s = 1,2,\ldots$$

där $\alpha_{0,s}$ är nollställarna till Besselfunktionen J_0: $J_0(\alpha_{0,s}) = 0$. Vi får

$$u(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} A_s(t) J_0(k_s r)$$

där

$$A_s''(t) + (k_s c)^2 A_s(t) = 0, \quad A_s(0) = 0, \quad A_s'(0) = B_s$$

och

$$\sum_s B_s J_0(k_s r) = v_0,$$

dvs.,

$$B_s \int_0^R J_0(k_s r)^2 r dr = \int_0^R v_0 J_0(k_s r) r dr.$$

Detta ger

$$A_s(t) = B_s \frac{1}{ck_s} \sin(ck_s t).$$

<u>Svar:</u>

$$u(r,\theta,t) = \sum_{s=1}^{\infty} B_s J_0(k_s r) \frac{1}{ck_s} \sin(ck_s t)$$

där

$$B_s = v_0 \frac{\int_0^R J_0(k_s r) r dr}{\int_0^R J_0(k_s r)^2 r dr}$$

och $k_s = \alpha_{0,s}/R$, där $\alpha_{0,s}$ är nollställarna till Besselfunktionen J_0.

Anmärkning: Integralerna ovan kan beräknas (se t.ex. BETA Kap. 12.4), och detta ger

$$B_s = \frac{2v_0}{\alpha_{0,s} J_1(\alpha_{0,s})}.$$

(b) Grundvinkelfrekvensen är

$$\omega = ck_{0,1} = c\frac{\alpha_{0,1}}{R} = 2.4048\ldots\frac{c}{R}$$

där $\alpha_{0,1}$ är första nollställe till Besselfunktionen J_0 (värdet för $\alpha_{0,1}$ kan hittas i BETA Kap. 12.4, t.ex.); c är våghastigheten och R radie av membranen.

4. Temperaturen u beror bara på $\mathbf{x} = (x, y)$ och uppfyller

$$-\Delta u(\mathbf{x}) = \frac{q}{\lambda}\delta^2(\mathbf{x})$$

och

$$u|_{r=R} = g, \quad g(\theta) = T_0 \cos(2\theta)$$

där r, θ är cylinderkoordinater. Vi delar upp problemet i två delar och superponerar $u = u_1 + u_2$ där $u_{1,2}$ är definierade genom

$$-\Delta u_1(\mathbf{x}) = \frac{q}{\lambda}\delta^2(\mathbf{x} - x_0), \quad u|_{r=R} = 0$$

och

$$-\Delta u_2(\mathbf{x}) = 0, \quad u_2|_{r=R} = g.$$

Vi först beräkna u_1. Fundamentallösningen till Laplaces operator $-\Delta$ är

$$G_0(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi}\ln(r)$$

dvs.,

$$-\Delta G_0(\mathbf{x}) = \delta^2(\mathbf{x}).$$

OBS att $G_0|_{r=R} = -\frac{1}{2\pi}\ln(R)$, och därför uppfyller

$$\tilde{G}_0(\mathbf{x}) = G_0(\mathbf{x}) - G_0|_{r=R} = -\frac{1}{2\pi}\ln(r/R)$$

följande problem:

$$-\Delta\tilde{G}_0(\mathbf{x}) = \delta^2(\mathbf{x}), \quad \tilde{G}_0|_{r=R} = 0.$$

Detta ger

$$u_1(\mathbf{x}) = \frac{q}{\lambda}\tilde{G}_0(\mathbf{x}) = -\frac{q}{2\pi\lambda}\ln(r/R).$$

Problemet för u_2 kan lösas med Fouriers metod:

$$u_2(r, \theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n r^{|n|} \mathrm{e}^{in\theta}$$

uppfyller $\Delta u_2 = 0$ för godtyckliga constander c_n, och

$$u_2(R, \theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n R^{|n|}\mathrm{e}^{in\theta} = T_0\cos(2\theta) = \frac{1}{2}T_0(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta})$$

ger $c_2 = c_{-2} = T_2/(2R^2)$ och $c_n = 0$ annars. Detta ger

$$u_2(r, \theta) = \frac{T_0 r^2}{2R^2}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}) = T_0(r/R)^2\cos(2\theta).$$

<u>Svar:</u>

$$u(r, \theta) = -\frac{q}{2\pi\lambda}\ln(r/R) + T_0(r/R)^2\cos(2\theta).$$

Anmärkning: Problemet kan också lösas med Greensfunktionsmetoden. Greensfunktionen $G = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ till problemet i (a) definieras genom

$$-\Delta_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')|_{|\mathbf{x}|=R} = 0,$$

och detter ger (kursboken Kap. 5.5)

$$u(\mathbf{r}) = \int_{|\mathbf{x}'|\leq R} G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\frac{q}{\lambda}\delta^2(\mathbf{x}')d^2x' - \int_{|\mathbf{x}'|=R} d\theta' \left.\frac{\partial}{\partial r'}G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right|_{r'=R} g(\theta'),$$

dvs.,

$$u(r,\theta) = \frac{q}{\lambda}G(r,\theta,0,0) - \int_0^{2\pi} d\theta' G_{r'}(r,\theta,R,\theta')g(\theta').$$

Greensfunktionen G kan beräknas med spegling (kursboken Kap. 5.5) eller med Fouriers metod. Första metoden ger

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = -\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|R}{|\mathbf{x}'||\mathbf{x}-\mathbf{x}''|}\right)$$

där

$$\mathbf{x}'' = c\mathbf{x}', \quad |\mathbf{x}''||\mathbf{x}'| = R^2$$

dvs., $\mathbf{x}'' = \mathbf{x}'R^2/|\mathbf{x}'|^2$, och med $(x,y) = r\cos\theta$, $(x',y') = r'\cos\theta'$, $(x'',y'') = (R^2/r')\cos\theta'$,

$$G(r,\theta,r',\theta') = -\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{R\sqrt{r^2+(r')^2-2rr'\cos(\theta-\theta')}}{\sqrt{(rr')^2+R^4-2rr'R^2\cos(\theta-\theta')}}\right).$$

Detta ger

$$G(r,\theta,0,\theta') = -\frac{1}{2\pi}\ln(r/R), \quad G_{r'}(r,\theta,R,\theta') = -\frac{1}{2\pi}\frac{1-(r/R)^2}{1+(r/R)^2-2(r/R)\cos(\theta-\theta')}$$

och

$$u(r,\theta) = -\frac{q}{2\pi\lambda}\ln(r/R) + T_0\int_0^{2\pi} d\theta'\frac{1}{2\pi}\frac{1-(r/R)^2}{1+(r/R)^2-2(r/R)\cos(\theta-\theta')}\cos(2\theta').$$

Integralen ovan kan beräknas med residuumsatsen (komplex analys).

(b) Greensfuntionen till problemet i **2.** (a) är funktionen $G = G(z,t,z',t')$, $0 < z, z' < L$ och $t, t' > 0$, som definieras genom

$$G_t(z,t,z',t') - aG_{zz}t(z,t,z',t') = \delta(z-z')\delta(t-t')$$

$$G(0,t,z',t') = G_z(L,t,z',t') = G(z,0,z',t') = 0.$$

5. (a) Anta en väg $y(x)$, $0 \leq x \leq a$, där $y(0) = 0$ och $y(a) = 0$. Tiden för att komma från $(x,y) = (0,0)$ till $(x,y) = (a,0)$ är

$$T = \int_{(0,0)}^{(a,0)} \frac{ds}{v} = \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{v(y(x))}dx,$$

och vi skall extremerar funktionalen $T[y]$. Funktionalen kan skrivas som

$$T[y] = \int_0^a F(y(x),y'(x))dx$$

där

$$F(y,y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{v(y)}$$

är oberoende av x. Euler-Lagrange ekvationer därför kan lösas genom

$$y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F = -\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}v(y)} = -\tilde{C}$$

där $\tilde{C}$ är en konstant. Separationen ger

$$y'(x) = \pm\sqrt{\frac{1-C^2y^2}{C^2y^2}}$$

där $C = c\tilde{C}$, och

$$\int \frac{Cydy}{\sqrt{1-C^2y^2}} = \int dx,$$

dvs.,

$$-\frac{1}{C}\sqrt{1-C^2y^2} = x + c_1.$$

OBS att alla lösningar till Euler-Lagrange ekvationen ovan är circlar $(x+c_1)^2+y^2 = 1/C^2$. Integrationskonstanten c_1 bestäms genom att sätta $y(0) = 0$:

$$-\frac{1}{C} = c_1,$$

och vi får

$$y = \frac{1}{C}\sqrt{1-(1-Cx)^2} = \sqrt{x(K-x)}$$

där $K = 2/C > 0$ och $K \geq a$, därför att skall vara definerad för $0 < x < a$. Randvillkoret $y(a) = 0$ ger $K = a$.

Svar:

$$y(x) = \sqrt{x(a-x)}, \quad 0 \leq x \leq a$$

(b) Villkoren blir nu

$$y(0) = 0, \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=a} = 0,$$

eller

$$y(0) = 0, \quad y'(a) = 0.$$

Euler-Lagrange ekvationen och randvillkor $y(0) = 0$ är samma som i (a), och vi får som ovan

$$y(x) = \sqrt{x(K-x)}$$

där K skall bestämmas genom $y'(a) = 0$. Detta ger $K = 2a$.

Svar:

$$y(x) = \sqrt{x(2a-x)}, \quad 0 \leq x \leq a.$$