KTH Fysik

Tentamen i **5A1305 Fysikens matematiska metoder: tensoranalystentamen**

Tisdagen den 9 januari 2007 kl 09.00 – 12.00

Anteckna på varje blad:	namn, utbildningslinje, årskurs och problemnummer.
Tillåtna hjälpmedel:	1) Teoretisk fysiks formelsamling
	2) BETA
	3) NBS Handbook of Mathematical Functions
	4) Josefsson, Formel- och tabellsamling i matematik
	5) Tefyma
	6) Spiegel, Mathematical Handbook
	7) Zwillinger, CRC Standard Mathematical Tables and Formulae
	Obs! Miniräknare ej tillåten.
Examinator:	Edwin Langmann (tel: 5537 8173 Epost: langmann@kth.se)
Resultat:	Anslås på institutionens studentexpedition, Roslagstullsbacken 21
Lösningar:	Kommer att finnas på kurshemsidan, `http://courses.theophys.kth.se/5A1305/`
Motivera utförligt!	Otillräckliga motiveringar kan medför poängavdrag.

---

1. En tensor har komponenterna $T_{11} = 1$, $T_{13} = -2$, $T_{31} = 3$, $T_{33} = 2$, och $T_{ij} = 0$ annars, relativt det kartesiska koordinatsystemet K.

   (a) Låt x_i vara komponenterna av ortsvektorn i K och x'_i komponenterna av ortsvektorn relativt koordinatsystemet K' som är vridet vinkeln α relativt K kring den med K gemensamma x_2-axeln. Beräkna

   $$\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$$

   och $T_{ij} x_i x_j$.

   (b) Beräkna $T_{ij}T_{ij}$, T_{ii}, och $C_i = \epsilon_{ijk} T_{jk}$.

2. Låt $\mathbf{A}$ vara ett vektorfält och $\mathbf{r}$ ortsvektorn. Beräkna med hjälp av tensormetoder

   (a)
   $$\nabla \times (\mathbf{r} \times \mathbf{A}),$$

   (b)
   $$\oint_S (\mathbf{r} \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

   där S är ytan som omslutar en volymen V som inte innehåller origo $\mathbf{r} = 0$ och där $\mathbf{A}$ uppfyller
   $$\nabla \times \mathbf{A} = b\,\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

   med b en konstant.

3. Två tidsberoende vektorfält $\mathbf{E}$ och $\mathbf{B}$ uppfyller

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0,$$

och är sådanna att det finns ett vektorfält $\mathbf{A}$ och ett skalärfält φ så att

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

och

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

där $c > 0$ är konstant och t tiden. Visa att φ och $\mathbf{A}$ uppfyller vågekvationen, dvs.,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2\varphi = 0, \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Ange en möjlig fysikalisk tolkning av ekvationerna ovan.

LYCKA TILL!

Några viktiga formler i tensoranalys

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i$$
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{e}}_i \epsilon_{ijk} A_j B_k$$
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_i A_i$$
$$\nabla \times \mathbf{A} = \hat{\mathbf{e}}_i \epsilon_{ijk} \partial_j A_k$$

Permutationssymbolen

$$\epsilon_{ijk} = 1 \quad \text{om } i, j, k \quad \text{är en jämn permutation av } 1, 2, 3$$
$$\epsilon_{ijk} = -1 \quad \text{om } i, j, k \quad \text{är en udda permutation av } 1, 2, 3$$
$$\epsilon_{ijk} = 0 \quad \text{om minst 2 index är lika}$$

(Kroneckers) delta

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{om } i = j$$
$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{om } i \neq j$$

$\boldsymbol{\epsilon}$-$\boldsymbol{\delta}$-relationen

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

Stokes sats (tensornotation)

$$\int_S \epsilon_{rst} \partial_t A_{jk\ldots} dS_s = \oint_L A_{jk\ldots} dx_r$$

Gauss sats (tensornotation)

$$\int_V \partial_i A_{jk\ldots} dV = \oint_S A_{jk\ldots} dS_i$$

Lösningsföreslag till tensoranalystentamen 070109

1. (a) Transformationsmatrisen $a = (a_{jk})$ är

$$a = \begin{pmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{pmatrix}$$

där $c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$. Detta ger $x_i' = a_{ij}x_j$, och

$$\frac{\partial x_i'}{\partial x_j} = a_{ij},$$

dvs., $a_{11} = a_{33} = c$, $a_{13} = -a_{31} = s$, $a_{22} = 1$, och $a_{ij} = 0$ annars.

$$T_{ij}x_ix_j = x_1^2 - 2x_1x_3 + 3x_3x_1 + 2x_3^2 = x_1^2 + x_1x_3 + 2x_3^2.$$

(b)

$$T_{ij}T_{ij} = 1^2 + (-2)^2 + 3^2 + 2^2 = 18, \quad T_{ii} = 1 + 2 = 3,$$

och

$$C_1 = T_{23} - T_{32} = 0, \quad C_2 = T_{31} - T_{13} = 5, \quad C_3 = T_{12} - T_{21} = 0.$$

2. (a)

$$(\nabla \times (\mathbf{r} \times \mathbf{A}))_i = \epsilon_{ijk}\partial_j\epsilon_{k\ell m}x_\ell A_m$$

$=$

$$= (\delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell})\partial_j x_\ell A_m = \partial_j(x_iA_j) - \partial_j(x_jA_i)$$
$$= A_i + x_i\nabla\cdot\mathbf{A} - 3A_i - (\mathbf{r}\cdot\nabla)A_i$$

dvs.,

$$\nabla \times (\mathbf{r} \times \mathbf{A}) = \mathbf{r}(\nabla\cdot\mathbf{A}) - (\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{A} - 2\mathbf{A}.$$

(b)

$$\oint_S (\mathbf{r}\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{A})dV$$
$$= \int_V \underbrace{\partial_i\epsilon_{ijk}x_jA_k}_{=x_j\epsilon_{ijk}\partial_iA_k} dV = -\int_V x_j \underbrace{\epsilon_{jik}\partial_iA_k}_{=(\nabla\times\mathbf{A})_j} dV$$
$$= -\int_V \mathbf{r}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})dV = -\int \underbrace{\mathbf{r}\cdot b\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3}_{=b/|\mathbf{r}|} dV = -b\int_V \frac{1}{|\mathbf{r}|}dV.$$

Anmärkning: OBS att $\nabla\times\mathbf{A}$ kan inte väljas hur som helst p.g.a. $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$. Men detta är OK här:

$$\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = -\nabla^2\frac{1}{|\mathbf{r}|} = 4\pi\delta^3(\mathbf{r}) = 0 \quad \forall\mathbf{r}\neq\mathbf{0}.$$

3.

$$\mathbf{0} = \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \underbrace{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})}_{=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t})$$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\mathbf{A} + \underbrace{\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) + \frac{1}{c}\nabla(\frac{\partial\varphi}{\partial t})}_{=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}+(1/c)\partial\varphi/\partial t)=0}$$

dvs.,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

$$0 = \nabla\cdot(-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = -\nabla^2\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\nabla\cdot\mathbf{A}}_{=-(1/c)\partial\varphi/\partial t}$$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \nabla^2\varphi.$$

v.s.v.

$\mathbf{E}$ kan tolkas som ett elektriskt fält och $\mathbf{B}$ som magnetiskt fält, och ekvationerna är ekvivalenta med Maxwells ekvationer i vakuum: Maxwells ekvationerna $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ och $\nabla\times\mathbf{E} = (1/c)\partial\mathbf{B}/\partial t$ kan uppfyllas genom att införa en vektorpotential $\mathbf{A}$ och ett skalarpotential φ så att $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$ och $\mathbf{E} + (1/c)\partial\mathbf{A}/\partial = -\nabla\varphi$. Potentialerna är inte entydiga men kan väljas så att villkoret $\nabla\cdot\mathbf{A} + (1/c)\partial\varphi/\partial t = 0$ uppfylls.