KTH Teoretisk Fysik

Tentamen i **5A1301/5A1305 Fysikens matematiska metoder**

Tisdagen den 16 januari 2007, kl 08:00-13:00

Anteckna på varje blad: namn, utbildningslinje, årskurs och problemnummer.
Notera på första tentabladet om du har hemtal tillgodo från tidigare kurs,
och vilken termin kursen gick!

Tillåtna hjälpmedel:	1) Teoretisk fysiks formelsamling
	2) BETA
	3) NBS Handbook of Mathematical Functions
	4) Josefsson, Formel- och tabellsamling i matematik
	5) Tefyma
	6) Spiegel, Mathematical Handbook
	7) Zwillinger, CRC Standard Mathematical Tables and Formulae
	Obs! Miniräknare är ej tillåten.
Examinator:	Edwin Langmann (tel: 5537 8173 epost: langmann@kth.se)
Lösningsföreslag:	Kommer att finnas på kurshemsidan,
	`http://courses.physics.kth.se/5A1305/`
Motivera utförligt!	Otillräckliga motiveringar medför poängavdrag.
	Inför och förklara själv konstanter och symboler du behöver!

---

1. (a) Bestäm lösningen $u = u(x,t)$ till ekvationen

$$u_t - a u_{xx} - \beta u = 0$$

för $t > 0$ och $0 \leq x \leq L$ med följande rand- och begynnelsevillkor

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \quad u(x,0) = U_0 \delta(x - L/2),$$

där $a > 0$, $\beta > 0$ och $U_0 > 0$ är konstanter, och $\beta < a(\pi/L)^2$. (2p).

(b) Kompletera i detalj följande tolkningen av modellen i (a): *"Problemet i (a) kan tolkas som en modell för en bakteriepopulation i ... som växer och sprider sig ..."* Tolkningen skall till större delen vara formulerad i ord och så detaljerad att modellen är entydigt specificerad, dvs., alla matematiska symboler skall förklaras, och alla termer i differentialekvationen och alla villkor skall tolkas (1p).

2. (a) Bestäm *en* funktion $f = f(x,t)$, $0 < x < L$ och $t > 0$, som uppfyller

$$f_{tt}(x,t) - c^2 f_{xx}(x,t) = A \sin(\Omega t)$$

och

$$f(0,t) = f(L,t) = 0;$$

L, c, A och $\Omega < c\pi/L$ är positiva konstanter. (2p).

(b) Ange en rimlig fysikalisk tolkning av problemet i (a). Ditt svar skall vara till större delen formulerat i ord och så detaljerad att den matematiska modellen är fullständig specificerad. (1p).

3. Ett homogent klot med radie R och konstant temperatur T_0 flyttas vid tiden $t = 0$ till en omgivning med konstant temperatur $T_1 > T_0$ (t.ex. ett köttbulle tas ut från frysen). Beräkna temperaturens tidsutveckling inom klotet efter flyttningen först i en enkel modell enligt (a) nedan, och sedan enligt en förfinat modell enligt (b):

(a) Anta att klotets randtemperatur är lika med omgivningens temperatur.

(b) Anta att Newtons avsvalningslag gäller vid klotets rand.

Jämför lösningar och diskutera när modellen i (a) är en bra approximation till modellen i (b).

4. (a) Beräkna den stationära temperaturfördelningen i en cylindrisk, homogen, mycket lång stav som ligger i $z > 0$, med konstant temperatur T_0 vid randytorna $z = 0$ (=bottenskivan) och $r = R$ (mantelytan), och som värms av en värmekälla

$$h(z) = \rho_0 \mathrm{e}^{-\alpha z}, \quad z \geq 0;$$

r, φ, z är cylinderkoordinater, och $\rho_0 > 0$ och $\alpha > 0$ är konstanter. (2p)

(b) Definiera Greensfunktionen till problemet i (a) (1p).

5. Begränsningsytan $S : z = p(x, y)$ av en homogen vätska med totalvolymen $|V|$ i en behållare som omsluter regionen $z > 0$, $(x, y) \in \Omega$ (= område i xy-planet) kan beräknas från följande variationsprincip: *"potentiella energin E hos vätskan är minimal, med vätskans totalvolymen* Vol *fixerad till $|V|$".* Vi antar att $|V|$ är tillräklig stor att $p(x, y) > 0$ $\forall (x, y) \in \Omega$. Potentiella energin är

$$E = \rho g \int_V z dV + \gamma \int_S dS$$

där V är volymen $0 \leq z \leq p(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$ som intas av vätskan, $\rho > 0$ är massdensiteten, γ är ytspänningskoefficienten, g är tyngdaccelerationen, och $Vol = \int_V dV = |V|$.

(a) Ange en fysikalisk tolkning av E ovan. Anta att Ω är ett rektangel $-L \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq a$, där a är så liten att p är oberoende av y: $p = p(x)$. Visa att E och Vol ovan då blir

$$E[p] = a \int_{-L}^{L} dx \, \left(\frac{\rho g}{2} p(x)^2 + \gamma \sqrt{1 + p'(x)^2} \right), \quad Vol[p] = a \int_{-L}^{L} dx \, p(x).$$

(b) Bestäm en enkel appoximationslösning till variationsprincipen ovan på följande sätt: Gör en ansats

$$p(x) = p_0 + \alpha |x|$$

och bestäm variationsparameterna $p_0 > 0$ och α så att $E[p]$ är ett extremum med $Vol[p]$ fixerad till $|V|$. Visa att din lösning är ett minimum.

(c) Bestäm den exakta lösningen $p(x)$ till variationspricipen ovan.

Ledning: Härled Euler-Lagrange ekvationen och randvillkor från variationsprincipen och beräkna lösningen. Du kan anta att $p(x) = p(-x)$. Det är möjligt att härleda en integralframställning

$$x = \int_{p(0)}^{p(x)} dx (\ldots),$$

och du behöver inte beräkna integralen. Om din lösning har denna form så ange också ekvationerna som definierar $p(0)$ och andra konstanter du behöver.

LYCKA TILL!

Lösningsföreslag till FYSMAT Tentamen den 16 januari 2007

1. (a) Vi utvecklar funktionen u i egenfunktioner $f = f_n$ som löser problemet

$$-f''(x) = k^2 f(x), \quad f'(0) = f'(a) = 0,$$

i.e.,

$$f_n(x) = \cos(k_n x), \quad k_n = n\frac{\pi}{a}, \quad n = 0, 1, 2, 3 \ldots.$$

Detta ger

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \cos(k_n x).$$

RV är då uppfyllda, och PDE och BV ger

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big(c_n'(t) + a k_n^2 c_n(t) - \beta c_n(t) \big) \cos(k_n x) = 0$$

och

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(0) \cos(k_n x) = U_0 \delta(x - L/2) \Rightarrow c_n(0) \int_0^L \cos^2(k_n x) dx$$

$$= U_0 \int_0^L \delta(x - L/2) \cos(k_n x) dx = U_0 \cos(k_n L/2) = U_0(-1)^n.$$

Detta är ekvivalent med ODE problemet (pga. att funktionerna f_n utgör ett fullständigt ortogonalsystem)

$$c_n'(t) + a k_n^2 c_n(t) - \beta c_n(t) = 0, \quad c_0(0) = U_0/L, \quad c_{n>0}(0) = 2U_0(-1)^n/L$$

som har lösningen

$$c_0(t) = U_0 \mathrm{e}^{\beta t}/L, \quad c_{n>0}(t) = 2U_0 \mathrm{e}^{-(a k_n^2 - \beta)t}/L.$$

Svar:

$$u(x,t) = \frac{U_0}{L}\left(\mathrm{e}^{\beta t} + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(k_n x) \mathrm{e}^{-(a k_n^2 - \beta)t} \right), \quad k_n = n\frac{\pi}{L}.$$

Obs. att

$$U(t) = \int_0^L u(x,t) dx = U_0 \mathrm{e}^{\beta t}.$$

(b) Problemet i (a) kan modellera bakterier som växer och förflyttar sig i ett näringsmedel som befinner sig i en rektangulär behållare $0 \le x \le L$ och $0 \le y \le a$, där a är så liten att bakteriens täthet u (= antal per längdenhet) vid tiden t och i positionen (x,y) är oberoende av y: $u = u(x,t)$. Bakterierna uppfyller kontinuitetsekvationen

$$u_t + \nabla \cdot \mathbf{j} = h(t,x)$$

där bakterieströmmen är $\mathbf{j} = -a\nabla u$ med diffusionskonstanten a, och källtätheten är $h = \beta u$: ju mer bakterier det finns desto mer bakterier produceras. Totala mängden $U(t)$ av bakterier i behållaren växer som $U(t) = U(0)\mathrm{e}^{\beta t}$, och $\ln(2)\beta$ är därför tiden så bakteriemängden fördubblats.

Detta ger

$$u_t - a\Delta u - \beta u = 0$$

och PDE i (a) ovan om $u = u(x,t)$.

Bakterieströmmen vid behållarens rand är noll: $j(t,0) = j(t,L) = 0$ där $j(x,t) = -au_x(x,t)$. Detta ger RV.

$u(x,0) = U_0\delta(x - L/0)$ betyder att vid tiden $t = 0$ är totala bakteriemängden U_0 koncentrerad i punkten $x = L/2$.

2. (a) Ansatsen

$$f(x,t) = \sin(\Omega t)g(x)$$

ger ODE

$$-\Omega^2 g - c^2 g'' = A$$

med

$$g(0) = g(L) = 0.$$

Almänna lösningen till ODE är

$$g(x) = -\frac{A}{\Omega^2} + c_1\sin(kx) + c_2\cos(kx), \quad k = \Omega/c,$$

och randvillkoren ger

$$-\frac{A}{\Omega^2} + c_2 = 0, \quad -\frac{A}{\Omega^2} + c_1\sin(kL) + c_2\cos(kL) = 0.$$

Svar:

$$f(x,t) = \frac{A}{\Omega^2}\left(-1 + \cos(kx) + \frac{1-\cos(kL)}{\sin(kL)}\sin(kx)\right)\sin(\Omega t).$$

[Alternativ lösning: Ansatsen

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\sin(k_n x), \quad k_n = n\pi/L$$

uppfyller RV, och PDE ger

$$c_n''(t) + (ck_n)^2 c_n(t) = b_n\sin(\Omega t), \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L A\sin(k_n x)dx = \frac{2A}{Lk_n}[1 - \underbrace{\cos(k_n L)}_{=(-1)^n}].$$

Ansatsen $c_n(t) = a_n\sin(\Omega t)$ ger en partikulärlösning till ODE ovan:

$$c_n(t) = \frac{b_n}{(ck_n)^2 - \Omega^2}\sin(\Omega t).$$

Svar:

$$f(x,t) = \sin(\Omega t)\sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty}\frac{4A}{Lk_n((k_n c)^2 - \Omega^2)}\sin(k_n x).$$

]

(b) Exempel 3.7 i kursboken. Vi har inga begynnelsevillkor, och därför är lösningen inte entydig: lösningen ovan är en partikulärlösning.

3. (a) Låt $T = T(r,t)$ vara klotets temperatur vid tiden t och vid avståndet r från klotets medelpunkt: $t > 0$ och $0 \leq r < R$. Vi antar att väreledningsekvationen gäller: $T_t = a\Delta T$, dvs. i sfäriska koordinater (obs. att T är oberoende av vinklarna θ och φ)

$$T_t = ar^{-2}\partial_r(r^2\partial_r T)$$

där $\partial_r = \partial/\partial r$ och $a > 0$ är klotets värmediffusivitet. Vi har följande rand- och begynnelsevillkor:

$$T(R,t) = T_1, \quad T(r,0) = T_0.$$

Randvillkoren kan göras homogena genom ansatsen $T(r,t) = u(r,t) + T_1$. Detta ger

$$u_t = ar^{-2}\partial_r(r^2\partial_r u), \quad u(R,t) = 0, \quad u(r,0) = -(T_1 - T_0).$$

Vi skall beräkna egenvärden λ_n och egenfunktioner φ_n till operatorn $-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d}{dr})$ med de givna RV i hilbertrummet $L_2(r^2,[0,R])$. Obs. viktfunktionen: skalärprodukten är $(f|g) = \int_0^R r^2\overline{f(r)}g(r)$. Egenfunktionerna är (jämför med Exempel 3.16 i kursboken)

$$\varphi_n(r) = j_0(k_n r) = \frac{\sin(k_n r)}{k_n r}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

där $\varphi_n(R) = 0$ ger

$$k_n = \frac{n\pi}{R}.$$

Ansatsen

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\varphi_n(r),$$

PDE, och BV ger

$$c_n'(t) + ak_n^2 c_n(t) = 0, \quad c_n(0) = \frac{(\varphi_n|T_0 - T_1)}{(\varphi_n, \varphi_n)} = (T_0 - T_1)\frac{\int_0^R drr^2\sin(k_n r)/(k_n r)}{\int_0^R drr^2(\sin(k_n r)/(k_n r))^2}$$

$$= (T_0 - T_1)\frac{2k_n}{R}\int_0^R drr\sin(k_n r),$$

dvs.,

$$c_n(t) = c_n(0)\mathrm{e}^{-ak_n^2 t}, \quad c_n(0) = (T_0 - T_1)2(-1)^{n+1}.$$

Svar:

$$T(r,t) = T_1 - (T_1 - T_0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}\sin(k_n r)}{k_n r}\mathrm{e}^{-ak_n^2 t}, \quad k_n = n\frac{\pi}{L}.$$

(b) Modellen är samma som i (a), bara RV generaliseras till

$$-\lambda T_r(R,t) = \alpha(T_1 - T(R,t))$$

med värmeövergångskoefficienten α och värmeledningsförmågan λ (sid. 27 och 8 i kursboken). Med $T(r,t) = T_1 + u(r,t)$ får vi problemet

$$u_t = ar^{-2}\partial_r(r^2\partial_r u), \quad u(R,t) - \beta u_r(R,t) = 0, \quad u(r,0) = -(T_1 - T_0),$$

där

$$\beta = \frac{\lambda}{\alpha}.$$

Problemet i (a) motsvarar gränsfallet $\beta = 0$.

Lösningen är samma som i (a), med skillnaden att egenfunktionerna $u_n(r) = j_0(kr)$ nu skall uppfylla RV $j_0(k_nR) - \beta k_n j_0'(k_nR) = 0$, dvs. (efter enkla räkningar)

$$\tan(k_n r) = \frac{\beta k_n r}{r + \beta},$$

som nu bestämmar värderna på k_n: Enligt Sturm-Liouville satsen finns där lösningar $k_1 < k_2 < \ldots$.

Lösningen till våra PDE problem blir då

$$T(r,t) = T_1 - (T_1 - T_0)\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin(k_n r)}{k_n r} \mathrm{e}^{-ak_n^2 t}$$

där

$$a_n = k_n \frac{\int_0^R dr r \sin(k_n r)}{\int_0^R dr \sin^2(k_n r)} = \cdots = -\frac{2\cos(k_n R)R}{R + \beta - \beta\cos(k_n R)}.$$

4. (a) Stavens temperatur $T = T(r,z)$ i cylinderkoordinater, $0 \leq r \leq R$ och $0 < z < \infty$, är oberoende av vinkeln φ, och $u(r,z) = T(r,z) - T_0$ uppfyller $\Delta u = h$ och $u|_{r=R} = u|_{z=0} = 0$, dvs.,

$$u_{rr}(r,z) + r^{-1}u_r(r,z) + u_{zz}(r,z) = \rho_0 \mathrm{e}^{-\alpha z^2}, \quad u(R,z) = u(r,0) = 0, \quad |u(r,t)| < \infty.$$

Vi beräkna egenvärden λ_n och egenfunktioner φ_n till operatorn $-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{d}{dr}) = \frac{d^2}{\frac{d}{r}^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}$ med de givna RV i hilbertrummet $L_2(r,[0,R])$. Obs. viktfunktionen: skalärprodukten är $(f|g) = \int_0^R r\overline{f(r)}g(r)$. Detta ger

$$\varphi_n(r) = J_0(k_n r), \quad k_n = \frac{\alpha_{0,n}}{R}$$

och $\lambda_n = k_n^2$ med nollställena $\alpha_{0,n}$ till Besselfunktionen J_0, $n = 1, 2, \ldots$ (jfm. Exempel 3.20 i kursboken). Utvecklingen

$$u(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z)\varphi_n(r)$$

ger

$$-k_n^2 c_n(z) + c_n''(z) = a_n(z) = \frac{(\varphi_n|h)}{(\varphi_n,\varphi_n)} = \frac{\int_0^R dr r J_0(k_n r)\rho_0 \mathrm{e}^{-\alpha z^2}}{\int_0^R dr r J_0(k_n r)^2} = a_n \mathrm{e}^{-\alpha z}, \quad c_n(0) = 0$$

där

$$a_n = \rho_0 \frac{\int_0^R dr r J_0(k_n r)}{\int_0^R dr r J_0(k_n r)^2}.$$

ODE problemet ovan kan lösas med Laplaces transform och spegling, men jag tycker det är enklare att lösa problemet direkt: allmäna homogena lösningen till ODE ovan är

$$c_n^{hom}(z) = A_n \mathrm{e}^{-k_n z} + B_n \mathrm{e}^{k_n z},$$

och en partikulärlösning kan beräknas med ansatsen $c_n^{part}(z) = konst.\,\mathrm{e}^{-\alpha z}$. Detta ger allmänna lösningen

$$c_n(z) = A_n\mathrm{e}^{-k_n z} + B_n\mathrm{e}^{k_n z} - \frac{a_n}{k_n^2-\alpha^2}\mathrm{e}^{-\alpha z}.$$

Villkoren $|c_n(z)| < \infty$ och $c_n(0) = 0$ ger $B_n = 0$ och $A_n = a_n/(k_n^2-\alpha^2)$, dvs.,

$$c_n(z) = \frac{a_n}{k_n^2-\alpha^2}\left(\mathrm{e}^{-k_n z} - \mathrm{e}^{-\alpha z}\right) = \frac{a_n}{k_n+\alpha}\frac{\mathrm{e}^{-k_n z} - \mathrm{e}^{-\alpha z}}{k_n-\alpha}.$$

OBS att lösningen är väldefinierad även om $k_n = \alpha$ (med l'Hospitals regel).

Svar:

$$u_n(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{k_n+\alpha}\frac{\mathrm{e}^{-k_n z} - \mathrm{e}^{-\alpha z}}{k_n-\alpha} J_n(k_n r)$$

med a_n ovan och $k_n = \alpha_{0,n}/R$.
Anmärkning: a_n kan beräknas:

$$a_n = \frac{2\rho_0}{k_n R J_1(k_n R)}.$$

(b) Greensfunktionen $G = G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, $\mathbf{r},\mathbf{r}' \in \Omega$(=cylindern), är definierad genom

$$\Delta_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \quad G(\mathbf{r},\mathbf{r}')|_{\mathbf{r}\in\partial\Omega}$$

I cylinderkoordinater blir detta $G = G(r,\varphi,z,r',\varphi',z')$ och

$$G_{rr} + r^{-1}G_r + G_{zz} = \frac{1}{r}\delta(r-r')\delta(\varphi-\varphi')\delta(z-z')$$

$$G|_{r=R} = G|_{z=0} = 0, \quad |G| < \infty, \quad G|_{\varphi\to\varphi+2\pi} = G = G|_{\varphi'\to\varphi'+2\pi}$$

där

$$0 \le r, r', < R, \quad \varphi,\varphi' \in \mathbb{R}, \quad 0 \le z, z' < \infty$$

(med $G|_{\varphi\to\varphi+2\pi}$ menas $G(r,\varphi+2\pi,z,r',\varphi',z')$).

5. (a)

$$\int_\Omega z dV = \int_{-L}^{L} dx \int_0^a dy \int_0^{p(x)} dz z = \frac{1}{2}a\int_{-L}^{L} p(x)^2$$

och

$$\int_S dS = \int_{-L}^{L} dx \int_0^a dy \sqrt{1+p_x^2+p_y^2} = a\int_{-L}^{L} dx\sqrt{1+p'(x)^2}$$

ger funktionalen $E[p]$.

$$Vol = \int_{-L}^{L} dx \int_0^a dy \int_0^{p(x)} dz = a\int_{-L}^{L} dx\, p(x).$$

Vi skall därför extremera

$$E - \lambda(Vol - |V|) = a\int_{-L}^{L} dx F(p(x),p'(x)) \equiv J[p]$$

där

$$F(p,p') = \frac{1}{2}\rho g p^2 + \gamma\sqrt{1+(p')^2} - \lambda(p-h);$$

λ är en Lagrangemultiplikator och $h = |V|/(2La)$ en parameter som bestämmer totala volymen (så att $|V| = \int_{-L}^{L} dx \int_0^a dyh$).

Ansatsen $p(x) = p_0 + \alpha|x|$ ger

$$E = 2a\int_0^L dx\, \left(\frac{\rho g}{2}(p_0+\alpha x)^2 + \gamma\sqrt{1+\alpha^2}\right)$$

$$= 2aL\left(\frac{\rho g}{6\alpha L}((p_0+\alpha L)^3 - p_0^3) + \gamma L\sqrt{1+\alpha^2} - \lambda(p_0 - h + \alpha L/2)\right)$$

och

$$Vol - |V| = \ldots = 2aL(p_0 + \alpha L/2 - h).$$

Villkoret $Vol - |V| = 0$ ger

$$p_0 = h - \alpha L/2.$$

Obs att vi antar att h är så stor att $p_0 > 0$. Vi skall därför minimera funktionen

$$G(\alpha) := E/(2aL)|_{p_0=h-\alpha L/2} = \rho g(\frac{h^2}{2} + \frac{(\alpha L)^2}{24}) + \gamma\sqrt{1+\alpha^2}$$

som bara beror på α^2. Vi skriver

$$G(\alpha) = G(0) + \rho g L^2 g(a^2), \quad g(\xi) = \frac{\alpha^2}{24} + \tilde{\gamma}\sqrt{1+\xi}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{\rho g L^2}.$$

Det är enkelt att se att $g(\xi)$ har sitt absoluta minimum i $\xi = 0$ om $\tilde{\gamma} > -\frac{1}{12}$ och i

$$\xi = \sqrt{\tilde{\gamma}^2 - 1} \;\text{ om } \tilde{\gamma} < -\frac{1}{12}.$$

Svar: Om $\gamma \geq -\frac{\rho g h^2}{12}$ så är $p(x) = h$ (konstant) lösningen som ger lägsta energin. Om $\gamma < -\frac{\rho g h^2}{12}$ så är

$$p(x) = h - \alpha L/2 + \alpha x, \quad \alpha = \pm\sqrt{\gamma^2/(12\rho g h)^2 - 1}$$

lösningen som ger lägsta energin; $h > |\alpha|L/2$.

(c) Euler-Lagrange ekvationen är

$$\frac{\partial E}{\partial p(x)} = \frac{d}{dx}\frac{\partial E}{\partial p'(x)}$$

dvs.,

$$\rho g p(x) - \lambda = \gamma\frac{d}{dx}\frac{p'(x)}{\sqrt{1+p'(x)^2}}.$$

$p(\pm L)$ är inte fixerade, och därför

$$\left.\frac{\partial F}{\partial p'(x)}\right|_{x=\pm L} = 0$$

dvs.,

$$p'(\pm L) = 0.$$

Euler-Lagrange ekvationen ekv. har första integralen

$$C = F - p' \frac{\partial F}{\partial p'} = \frac{\rho g p(x)^2}{2} + \gamma \frac{1}{\sqrt{1 + p'(x)^2}} - \lambda p(x). \quad (*)$$

Obs. att detta är consistent med $p(-x) = p(x)$.

Villkoret $p'(\pm L) = 0$ ger $p(L) = p(-L) \equiv p_1$ och

$$C = \frac{\rho g p_1^2}{2} + \gamma - \lambda p_1.$$

Ekv. (*) ovan kan separeras

$$p'(x) = \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{(C + \lambda p(x) - \rho g p(x)^2/2)^2} - 1}.$$

och ger

$$x = \int_{p_0}^{p(x)} \frac{dp}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{(C + \lambda p - \rho g p^2/2)^2} - 1}}.$$

Konstanten p_0 bestäms genom att sätta $x = L$ ovan,

$$L = \int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{(C + \lambda p - \rho g p^2/2)^2} - 1}},$$

och λ genom

$$a \int_{-L}^{L} p(x) dx = |V|.$$