3 Fundamentala lösningsmetoder

d'Alemberts lösning av vågekvationen

3.1. (L) Betrakta en mycket lång sträng som är fastspänd i ena änden. Den andra är så långt borta att vi kan tänka oss strängen som "halvoändlig". Vi studerar alltså området $0 \leq x < \infty$, där den fastspända punkten ligger i origo. En våg med given form $\alpha(\xi)$ infaller mot origo, dvs. för stora negativa t-värden gäller $u(x,t) = \alpha(x+ct)$. Beskriv matematiskt vad som händer!

3.2. En halvoändlig sträng är i ändpunkten fäst vid en ring (försumma dess massa) som kan röra sig längs en stav som är vinkelrät mot strängens viloläge. Ringens rörelse är dämpad så att $F_z = kv$, där F_z är kraften på ringen i stavens riktning och v är ringens hastighet. Det betyder att vi får randvillkoret $Su_x(0,t) = ku_t(0,t)$, där S är spännkraften i strängen. En våg $\alpha(x+ct)$ faller in mot ändpunkten. Beskriv det fortsatta förloppet. Vad händer för gränsfallen $k = 0$ och $k \to \infty$?

Produktmetoden, homogena problem

3.3. (L) Bestäm rörelsen hos en sträng som är inspänd i $x = 0$ och $x = \ell$ och som vid $t = 0$ har begynnelsevillkoren:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \alpha(x) = \begin{cases} 3\epsilon x/\ell & 0 \leq x \leq \ell/3 \\ 3\epsilon(\ell - x)/(2\ell) & \ell/3 \leq x \leq \ell \end{cases} \\ u_t(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

3.4. Bestäm rörelsen hos en inspänd sträng med längd ℓ som får en stöt vid $t = 0$. Begynnelsevillkoren blir

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0 \\ u_t(x,0) &= \beta(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \ell/2 - \delta \\ \epsilon(x - \ell/2 + \delta)/\delta & \ell/2 - \delta \leq x \leq \ell/2 \\ \epsilon(\ell/2 + \delta - x)/\delta & \ell/2 \leq x \leq \ell/2 + \delta \\ 0 & \ell/2 + \delta \leq x \leq \ell \end{cases} \end{aligned}$$

3.5. En sträng med längd ℓ är fastspänd i ena änden. Den andra är fäst i en mycket lätt ring som friktionsfritt kan röra sig efter en stav vinkelrätt mot strängens inspänningsriktning. En svängning startas genom att en punkt på avståndet $a(< \ell)$ från ringen dras ut en sträcka ϵ ($\epsilon \ll \ell$) och släpps vid $t = 0$. Ange strängens fortsatta rörelse.

3.6. Ändpunkterna hos en sträng av längd ℓ är fastsatta i två mycket lätta ringar som glider friktionsfritt längs två parallella stavar. Vid $t = 0$ är strängens läge $u(x,0) = 0$ och hastigheten längs strängen ges av

$$u_t(x,0) = v_0 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{\ell}\right)$$

Bestäm strängens rörelse. Se upp med första termen i serieutvecklingen!

3.7. Vid en konsert visar sig en sträng vara stämd en oktav för högt. En musikälskande humla ingriper genom att sätta sig mitt på strängen så att grundfrekvensen råkar halveras. Beräkna humlans massa. Blir övertonerna harmoniska? Strängen är inspänd och har längden 2ℓ spänningen S och massan per längdenhet ρ. Försumma Tyngdkraften.

Ledning: Grundsvängningen är symmetrisk map. strängens mittpunkt.

3.8. En lodrät behållare med konstant tvärsnitt innehåller en viss mängd rent vatten. Över vattnet skiktas vid $t = 0$ en lika stor volym av en vattenlösning med koncentration C_0 av ett färgämne så att det sammanlagda vätskedjupet blir h. Beräkna färgkoncentrationen vid behållarens botten som funktion av tiden om koncentrationen u uppfyller den endimensionella diffusionsekvationen

$$u_{xx} - \frac{1}{D} u_t = 0$$

Randvillkor på vätskevolymens begränsningsytor är $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ eftersom vi inte har något flöde ut ur vattnet.

3.9. En cylindrisk behållare innehåller 0,9 liter rent vatten. Över vattnet skiktas vid $t = 0$ 0,1 liter av en vattenlösning som innehåller 1 g av ett färgämne så att det totala vätskedjupet blir h. Färgämnets koncentration u uppfyller den endimensionella diffusionsekvationen med diffusionskonstanten D. Färgämnet adsorberas vid behållarens bottenyta, vilket medför att koncentrationen är noll där. Färgämnet kan inte passera ut från vattenytan, så där blir randvillkoret $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$. Beräkna den totala mängden färgämne löst i vattnet som funktion av tiden.

3.10. Tre likadana homogena cylindriska järnstavar är värmeisolerade på mantelytorna. Varje stav har längden ℓ och värmediffusiviteten a. Två av stavarna har temperaturen 0°C och den tredje 100°C. Den varmaste staven placeras i mitten och de båda andra på var sin sida i längdriktningen. Stavarna sätts i kontakt med varandra och de två fria cirkulära ändytorna hålls vid temperaturen 0°C. Bestäm temperaturen i stavarna som funktion av tiden.

3.11. Man önskar bestämma neutrontätheten, $u(x,t)$, i en uranstav av längd ℓ. Längs mantelytan är staven täckt med ett material som man kan anse reflekterar alla neutronerna. Man behöver därför bara betrakta neutrondiffusionen i stavens längdriktning. $u(x,t)$ lyder då ekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

λu är en källterm som härrör från fissionen och a är diffusiviteten. Antag att neutrontätheten är noll i stavens ändpunkter och bestäm $u(x,t)$ om vi från början har en konstant neutrontäthet N_0 i hela staven. Värdet på λ är sådant att neutrontätheten **inte** växer obegränsat med tiden. Ge en övre gräns för λ!

Inhomogena problem

3.12. I en vågledare med längden ℓ kan man ha en odämpad elektromagnetisk våg vars potential beskrivs av vågekvationen. Betrakta en situation där det inte finns någon våg i ledaren för tider $t < 0$, varefter man vid tiden $t = 0$ genererar en våg genom att ena ändpunkten av vågledaren får en potential V_0 som sedan hålls konstant. Den andra ändpunkten hålls vid potentialen noll. Beskriv den uppkomna vågen, dvs beräkna $V(x,t)$.

3.13. En homogen stav som hänger lodrätt, fastsvetsad i övre änden $x = 0$, får utföra longitudinella svängningar i tyngdkraftfältet. Svängningarna uppfyller

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = -\frac{g}{c^2}$$

där $u(x,t)$ är avvikelsen från jämviktsläget för det segment av staven som i spänningsfritt tillstånd befinner sig på avståndet x från ändpunkten. Bestäm $u(x,t)$ om staven vid $t = 0$ släpps från ett spänningsfritt tillstånd. Randvillkoret vid stavens fria ände är $u_x(\ell, t) = 0$. (Svängningarna kommer alltså att bestå av att staven trycks ihop och dras ut i längdriktningen.)

3.14. En sträng av längd ℓ har ena änden fastspänd vid $x = 0$, medan den andra sitter i en mycket lätt ring som glider friktionsfritt längs en stav vid $x = \ell$. Vid $t = 0$ befinner sig strängen i vila och sammanfaller med x-axeln. En konstant yttre kraft F riktad längs staven får verka på ringen då $t \geq 0$. Detta innebär att randvillkoret vid $x = \ell$ blir $u_x(\ell, t) = F/S$, där S är spännkraften i strängen. Beräkna strängens rörelse.

3.15. En cylindrisk metallstav av längd ℓ sammanbinder två kroppar med temperaturerna noll och T_0. Vid $t = 0$ upphör plötsligt kontakten med den nollgradiga kroppen. Beräkna temperaturen i staven för $t > 0$ under förutsättningen att stavens ändytor för $t < 0$ kan antas ha temperaturerna noll resp. T_0 och att värmeledningen till omgivningen, utom de båda kropparna, kan försummas. Stavens värmediffusivitet är a. Inför koordinatsystem med origo i den ände av staven som har temperaturen T_0.

3.16. En uranstav av längd ℓ, med värmekonduktivitet λ och tvärsnitt A är värmeisolerad på mantelytan och på den ena ändytan. Den andra ändytan hålls vid den konstanta temperaturen T_0. Inuti staven uppfyller temperaturen ekvationen

$$u_{xx} - \frac{1}{a} u_t = -\frac{h}{\lambda A}$$

där källtätheten h är konstant. Beräkna $u(x, t)$ för $t > 0$ om $u(x, 0) = T_0$ och ange även den effekt som strömmar ut ur staven. Effekten ges av $P = -A\lambda u_x$.

3.17. En cylindrisk metallstav av längd ℓ, med värmekonduktivitet λ och tvärsnitt A är isolerad på mantelytan och på den ena ändytan. Genom den andra ändytan leds per tidsenhet värmemängden Q in i cylindern likformigt fördelat över ändytan. Detta innebär att vi får randvillkoret $u_x(\ell, t) = Q/(\lambda A)$. Beräkna temperaturförloppet om cylindern vid tiden $t = 0$ har temperaturen noll.

3.18. Bestäm temperaturförloppet i staven enligt problem 3.17 om den ändyta som var isolerad i stället hålls vid den konstanta temperaturen noll.

3.19. En homogen, cylindrisk metallstav med längd ℓ, tvärsnittsarea A och värmediffusivitet a har begynnelsetemperaturen noll. Vid tiden $t = 0$ börjar man vid ena änden leda in värmemängden Q per tidsenhet. I den andra änden är värmeflödet proportionellt mot temperaturskillnaden mellan änden och luftens temperatur T_0. Detta innebär att vi får randvillkoren

$$\begin{aligned} u_x(0, t) &= -\frac{Q}{\lambda A} \\ u_x(\ell, t) &= \frac{\alpha}{\lambda A}(T_0 - u(\ell, t)) \end{aligned}$$

där $u(x, t)$ är temperaturfördelningen i staven, λ värmekonduktiviteten, och α värmeöverföringskoefficienten. Bestäm $u(x, t)$ för $t > 0$.

Tvungna svängningar

3.20. En sträng med längd ℓ är i ena änden fäst vid en ring med massan m. Ringen glider friktionsfritt längs en stav vinkelrätt mot inspänningsriktningen. En fjäder med fjäderkonstant k strävar att återföra ringen till jämviktsläget. Detta ger randvillkoret $mu_{tt}(0, t) = Su_x(0, t) - ku(0, t)$, där S är spännkraften i strängen. Strängens andra ände påtvingas rörelsen $u(\ell, t) = a \cos \omega t$. Bestäm strängens rörelse då så lång tid förflutit att alla egensvängningar dämpats ut. (ω är ej en resonansfrekvens.)

3.21. En sträng är fäst i $x = 0$ och $x = \ell$. Den påverkas av en yttre kraft med tätheten $f = ax(\ell - x) \cos \omega t$ vinkelrätt mot strängen. Svängningarna uppfyller då ekvationen

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = -\frac{a}{S} x(\ell - x) \cos \omega t$$

där S är spännkraften i strängen. Bestäm strängens rörelse då så lång tid förflutit att *alla egensvängningar dämpats ut.* Du får förutsätta att $\omega \neq n\pi c/\ell$.

Laplaces ekvation för en rektangel

3.22. En tunn kvadratisk metallskiva har kantlängden ℓ och tjockleken h. De kvadratiska randytorna $z = 0$ och $z = h$, samt randytorna $x = 0$ och $x = \ell$ är värmeisolerade. De återstående randytorna har temperaturerna

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0 \\ u(x, \ell) &= T_0 \ell \, \delta(x - \ell/2) \end{aligned}$$

Beräkna den stationära temperaturfördelningen $u(x, y)$ i skivan!

3.23. En inkompressibel vätska med viskositeten μ strömmar laminärt genom ett långt rör som har kvadratiskt tvärsnitt med sida b. Om strömningen är stationär gäller differentialekvationen

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = -S$$

för hastigheten $v(x, y)$ i rörets längdriktning. Koordinatsystemet är valt med z-axeln längs röret. $S = -\partial P/\partial z$ är det konstanta tryckfallet per meter längs röret. Vid rörets väggar gäller randvillkoret $v = 0$. Beräkna det totala vätskeflödet genom röret som funktion av S, b och μ.

Produktmetoden, tidsberoende inhomogeniteter

3.24. (L) En cylindrisk stav är isolerad längs mantelytan och har vid tiden $t = 0$ temperaturen T_0. För $t > 0$ låter man en ström $I_0 e^{-\alpha t/2}$ flyta genom staven. Därmed genereras värme i staven så att temperaturfördelningen uppfyller ekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{I_0^2 e^{-\alpha t}}{A^2 \sigma \lambda}$$

där λ är värmekonduktiviteten, σ elektriska konduktiviteten och A tvärsnittsarean. Beräkna temperaturfördelningen i staven för $t > 0$ om ändpunkterna hela tiden hålls vid temperaturen noll.

3.25. En cylindrisk stav är isolerad både längs mantelytan och i ändpunkterna. Vid tiden $t = 0$ har staven temperaturen noll. För tiden $t > 0$ genereras värme i staven så att temperaturfördelningen lyder ekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{Q}{\lambda} e^{-\alpha t} \sin \left(\frac{\pi}{\ell} x \right)$$

λ är värmekonduktiviteten och Q är en konstant. Bestäm temperaturfördelningen i staven för $t > 0$.

3.26. Temperaturvariationer vid jordytan förorsakar motsvarande temperaturfluktuationer i jordskorpan. Behandla jordytan som ett plan där temperaturen antas given som en periodisk funktion $f(t)$ med perioden T ($= 1$ år). Antag vidare att temperaturen i jordskorpan endast varierar med djupet och uppfyller endimensionella diffusionsekvationen och lös följande:

a) Bestäm temperaturfältet i jordskorpan *efter lång tid*.

b) På vilket djup råder vintertemperatur på sommaren, dvs på vilket djup är fasförskjutningen π hos 1:a partialvågen? Värmediffusiviteten a är (mycket approximativt) $2 \cdot 10^{-7}$ m^2/s.
$T = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 3{,}15 \cdot 10^7$ s.

c) Till vilket maximalt djup når tjälen om man antar att årsmedelvärdet hos $f(t)$ är $+7°$C och amplituden i årsvariationen är $10°$C (värden för Stockholm)?

5 Användning av produktmetoden och totala ortogonalföljder

Helmholtz ekvation i kartesiska koordinater

5.1. Ett kvadratiskt membran är inspänt i en plan ram ABCD med kantlängden a. Spännkraften är S och masstätheten ρ.

a) Bestäm avvikelsen $u(x, y, t)$ från jämviktsläget och frekvensen för de fyra egensvängningar som har lägst frekvens. Rita ut nodlinjerna för dessa i en figur!

b) Genom att superponera egensvängningar med samma frekvens kan man få andra nodlinjer. Bestäm den svängning med lägsta frekvens som har nodlinje längs kvadratens diagonal AC.

5.2. (L) En oaktsam trumslagare tappar sin kvadratiska trumma i golvet. Precis innan trumman slår i golvet har den hastigheten $-v_0$. Detta innebär att trumskinnet efter nedslaget får begynnelsehastigheten $-v_0$. Beräkna trumskinnets fortsatta rörelse.

Trumskinnet, som givetvis är fast inspänt längs kanterna, har sidan ℓ och våghastigheten c.

Laplaces ekvation i polära koordinater

5.3. Elektrisk ström flyter genom en mycket lång cylindrisk ledare med längden ℓ och radien R. Konduktiviteten beror av temperaturen T enligt

$$\sigma = a - bT, \qquad (a \text{ och } b \text{ är positiva konstanter})$$

Spänningsfallet över ledaren är V. Ledarens yta hålls vid temperaturen T_0. Bestäm den stationära temperaturfördelningen i ledaren. Källtätheten h i värmeledningsekvationen beror av den elektriska fältstyrkan $\mathbf{E}$ enligt sambandet $h = \sigma E^2$. $\mathbf{E}$ är konstant, $E = V/\ell$. Den stationära temperaturfördelningen T uppfyller ekvationen

$$\Delta T = -\frac{h}{\lambda}$$

där λ är värmekonduktiviteten.

5.4. En ideal inkompressibel vätska strömmar förbi en oändligt lång cylinder, vars radie är R. På stort avstånd från cylindern går vätskans hastighet mot gränsvärdet $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{e}_x$, där $\mathbf{v}_0$ är en konstant vektor ortogonal mot cylinderns symmetriaxel. Hastighetsfältet har en potential, dvs $\mathbf{v} = -\nabla\Phi$. Eftersom vätskan är inkompressibel gäller att $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$. Potentialen blir $\Phi = -v_0 x = -v_0 r\cos\varphi$ på stort avstånd från cylindern. Bestäm det stationära hastighetsfältet kring cylindern. Beräkna särskilt den maximala hastigheten i vätskan!

5.5. Ett cylindriskt rör med radie a och längd ℓ är uppladdat så att det har potentialen V_0. Man monterar på två jordade plattor i ändarna. Skarvarna är isolerade så att röret fortfarande har potentialen V_0. Potentialen $V(\mathbf{r})$ inuti cylindern uppfyller Laplaces ekvation. Bestäm $V(\mathbf{r})$ inuti cylindern.

5.6. En homogen stålcylinder med radien R och höjden ℓ är värmeisolerad på de plana ytorna $z = 0$ och $z = \ell$. Den buktiga cylinderytan hålls vid temperaturen

$$u(R, z) = T_0 \sin^2 \frac{\pi z}{\ell}$$

Beräkna den stationära temperaturfördelningen $u(r, z)$ i cylindern. Bestäm särskilt den maximala temperaturen på de värmeisolerade randytorna.

5.7. Beräkna den elektrostatiska potentialen inuti en cylinder med radien R och höjden 2ℓ. Potentialen är V_0 på den övre halvan av cylinderytan och noll på den undre halvan.

Ledning: Bestäm en partikulärlösning till Laplaces ekvation som bara beror av z samt antar värdena noll resp. V_0 på de cirkulära ändytorna.

5.8. En fabriksskorsten har höjden h, innerradien R_1 och ytterradien R_2. Man eldar på så att skorstenens insida efter lång tid får temperaturen $T_0 e^{-\mu z}$. Utsidan och ovansidan har temperaturen noll. Ingen värme strömmar ut genom bottenplattan. Bestäm den stationära temperaturfördelningen.

Våg- och diffusionsekvationen i polära koordinater

5.9. Ett cirkulärt membran med massan m, spänningen S och radien R svänger med lägsta möjliga frekvens så att membranets mittpunkt har amplituden A. Beräkna membranets kinetiska energi som funktion av tiden.

5.10. Om man ska koka morötter bör man avbryta kokningen då temperaturen i den kallaste punkten är T_0, för att inte gå miste om vitaminerna. Bestäm temperaturfördelningen som funktion av tiden i en morot som tas ut från jordkällaren (där temperaturen är T_1) och läggs i kokande vatten. Man får anta att morotens yta omedelbart antar vattnets temperatur.

En morot kan betraktas som en mycket lång cylinder med radie b, och värmediffusivitet a. Problemet är således tvådimensionellt.

Beräkna slutligen en ungefärlig koktid! (Du beöver bara ta med första termen i serieutvecklingen, även om det är en dålig approximation.)

5.11. På ett cirkulärt membran med radie R fästs centralt en liten skiva med radie $R_0 = R/10$. Skivan har så stor massa att den endast obetydligt påverkas av svängningarna och kan anses orörlig. Membranet har densiteten ρ och spänningen S, vilken antags vara oförändrad efter skivan fästs. I vilket förhållande ändras membranets grundfrekvens?

5.12. En bassäng med plan kvartscirkelformad botten med radien R och vertikala sidoytor är fylld med vatten till höjden h. Vattenytans vertikala förskjutning $u(r, \varphi, t)$ över vilonivån h uppfyller ekvationen

$$\Delta u - \frac{1}{gh}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Randvillkoret vid de vertikala begränsningsytorna är $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$. Beräkna frekvenser och skissera nodlinjer för de tre egensvängningar som har de lägsta frekvenserna.

5.13. En cirkulär elastisk platta med radien R vibrerar radiellt. Den radiella förskjutningen $u(r, t)$ av ett plattelement som i det odeformerade viloläget befinner sig på avståndet r från plattans medelpunkt uppfyller ekvationen

$$(\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right) - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

λ och μ är elastiska konstanter och ρ är plattans konstanta densitet. Bestäm frekvenserna för egensvängningarna hos en radiellt svängande platta som är fast inspänd vid kanten, dvs randvillkoret $u(R, t) = 0$ gäller. En av egensvängningarna har en enda nodcirkel. Beräkna radien hos denna nodcirkel!

5.14. Ett cirkulärt membran med radie R är inspänt vid randen. Membranet, som har spänningen S och densiteten ρ, är elastiskt bundet till viloläget av en krafttäthet $f = -au$ där a är en positiv konstant och u är membranets avvikelse från viloläget. u uppfyller då

$$\Delta u - \frac{\rho}{S}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a}{S}u$$

Beräkna membranets egenfrekvenser.

5.15. Ett homogent cirkulärt membran har radien R, spänningen S och densiteten (per ytenhet) ρ. Membranet är elastiskt inspänt vid radien $r = R$ på så sätt att den återförande kraften på ett infinitesimalt randelement ds är $dF = \kappa u\, ds$, där κ är en fjäderkonstant och u är randelementets avvikelse från jämviktsläget. Detta gör att vi får randvillkoret $-Su_r(R,t) = \kappa u(R,t)$. Bestäm membranets grundfrekvens i specialfallet $\kappa = 10S/R$.

5.16. En sluten cirkulär cylinder är fylld med en ideal gas, för vilken våghastigheten är c. Cylindern rör sig med konstant hastighet v_0 i en rätlinjig bana så att axeln hela tiden är vinkelrät mot banan. Vid tiden $t = 0$ stannas cylindern plötsligt, varefter svängningar uppstår i gasen. Bestäm hastighetsfördelningen i gasen för $t > 0$.

Hastighetsfördelningen ges av $\mathbf{v} = \nabla\Phi$. Hastighetspotentialen Φ lyder vågekvationen. Vid tiden $t = 0$ har hela gasmassan hastigheten $v_0\mathbf{e}_x$ men ingen acceleration. Detta innebär att $\Phi = v_0 x = v_0 r\cos\varphi$ och $\Phi_t = 0$ vid $t = 0$.

Tvungna svängningar i cylinderkoordinater

5.17. Differentialekvationen för långa vågor i en kanal lyder

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{g}{b(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left(A(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

där $u = u(x,t)$ är ytans avvikelse från jämviktsnivån och x är längdkoordinaten längs kanalen. $A(x)$ och $b(x)$ är kanalens tvärsnittsarea respektive bredd. Betrakta en kanal med konstant bredd men med varierande djup $h(x) = cx$. Kanalen har längden ℓ och mynnar ut i havet. Havsytans svängningar vid mynningen ges av

$$u(\ell,t) = a\cos\omega t$$

Beräkna $u(x,t)$.

Ledning: Gör ett variabelbyte: $y = \sqrt{x}$.

5.18. Ett homogent cirkulärt membran som är inspänt vid radien $r = R$ påverkas av en ljudvåg med vinkelfrekvensen ω. Den drivande kraften per ytenhet kan anses vara $f = A\cos\omega t$ där A är en konstant. Membranets svängningar uppfyller då ekvationen

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{A}{S}\cos\omega t, \quad c^2 = \frac{S\pi R^2}{m}$$

Bestäm membranets amplitud i mittpunkten då så lång tid förflutit att alla egensvängningar dämpats ut. Membranets massa är m och membranspänningen är S.

5.19. I längdriktningen mellan två mycket långa, perfekt ledande, koaxiala cylindrar med radierna a och b ($a < b$), önskar man ha en fortskridande elektromagnetisk våg. z-komponenten för en sådan våg skall vara på formen

$$E(\mathbf{r},t) = f(r,\varphi)e^{i(kz-\omega t)}.$$

E lyder vågekvationen och skall vara noll på de båda cylinderytorna. Våghastigheten är c.

Finn ett uttryck ur vilket man kan bestämma den lägsta frekvens ω en fortskridande våg mellan cylindrarna kan ha. Endast fortskridande vågor med frekvenser ω som gör att egenvärdet $k^2 > 0$ kan existera. Varför? Vad händer annars?

5.20. I en kompressibel gas uppfyller övertrycket $u(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r}, t) - p_0$ vågekvationen med ljudhastigheten c. Betrakta gasen innanför ett cylindriskt skal med radien R och längden ℓ. Mantelytan vibrerar så att randvillkoret blir

$$u(R, \varphi, z, t) = A \cos\varphi \cos\omega t$$

Topp- och bottenplattorna är fasta. Bestäm övertrycket som funktion av rum och tid, under antagandet att alla egensvängningar har dämpats ut. Antag att ω inte är en egenfrekvens. $\omega < c\pi/\ell$.

5.21. I ett långt rör med cirkulärt tvärsnitt (radie R) uppfyller en storhet u vågekvationen

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

med $u = 0$ på randen. Röret matas vid ena änden ($z = 0$) med en periodisk svängning

$$u = u_0 e^{-i\omega t}, \quad (u_0 = \text{konst.})$$

Ange den minsta vinkelfrekvens ω_0 för vilken röret kan fungera som vågledare, dvs vågor kan fortplantas genom röret. Ange också svängningsamplitudens storlek och radiella fördelning i ett tvärsnitt långt från $z = 0$, då ω är något större än ω_0.

Våg- och diffusionsekvationen i cylinderkoordinater

5.22. En homogen stålcylinder har radien R, längden ℓ och värmediffusiviteten a. Cylindern värms upp till temperaturen T_1 och sänks sedan ner i ett oljebad med temperaturen T_0. Beräkna temperaturförloppet i cylinderns centrum under förutsättningen att dess yta genast antar oljebadets temperatur.

5.23. Akustiska svängningar i en ideal gas kan under vissa förutsättningar beskrivas med en hastighetspotential Φ sådan att gasens hastighet $\mathbf{v} = -\nabla\Phi$. Φ uppfyller vågekvationen samt randvillkoret $\mathbf{n} \cdot \nabla\Phi = 0$ vid en fast vägg med normalriktningen $\mathbf{n}$. En gasmassa som är instängd i en rak cirkulär cylinder utför svängningar som uppfyller ovannämnda villkor. Bestäm cylinderns proportioner så att grundtonen blir degenererad. Ange också frekvenserna för de tre första övertonerna!

5.24. Neutrontätheten i en homogen cylinder bestående av ^{235}U kan antas lyda en diffusionsekvation med randvärdet noll och med en källterm (härrörande från fission) som kan sättas proportionell mot neutrontätheten u

$$\Delta u + \lambda u - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

λ och a är positiva konstanter. Bestäm villkoret på cylinderns radie R och höjd ℓ för att neutrontätheten inte ska växa obegränsat med tiden!

Laplaces ekvation i sfäriska koordinater

5.25. (L) Beräkna den elektrostatiska potentialen $V(r,\theta)$ i ett område som begränsas av två koncentriska sfärer med radierna R_1 resp. R_2 $(R_1 < R_2)$. Potentialen på sfärytorna är

$$\begin{aligned} V(R_1,\theta) &= 0 \\ V(R_2,\theta) &= V_0 \sin^2\theta \end{aligned}$$

V uppfyller Laplaces ekvation.

5.26. Familjen Granquist pyntar sin gran med homogena stålkulor istället för vanliga ihåliga. Kulorna har radien R. Den busige sonen har kommit över en tändare som han tänder och håller under en kula. När så lång tid gått att alla förändringar map tiden klingat ut, har kulans yta temperaturen $T_0 + \frac{T_1}{2}(1-\cos\theta)$. Beräkna temperaturfördelningen i kulan.

5.27. I centrum innanför en jordad sfär med radie a placeras en kvadrupol. Den elektrostatiska potentialen $V(\mathbf{r})$ uppfyller Laplaces ekvation, förutom för $r = 0$.

Om kvadrupolen hade varit ensam hade potentialen kring den varit

$$V_k(\mathbf{r}) = q\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3},$$

där q är en konstant. Detta innebär att potentialen innanför sfären måste uppfylla villkoret att $V(\mathbf{r}) \to V_k(\mathbf{r})$ då $r \to 0$.

Bestäm $V(\mathbf{r})$.

5.28. Ett fundamentalt problem inom teorin för kompositmaterial är följande: Ett klot med radien R_2 och konduktiviteten σ_2 omges av ett sfäriskt skal med tjockleken $R_1 - R_2$ och konduktiviteten σ_1. Klotet och skalet omges av ett oändligt medium med konduktiviteten σ_0. Ett elektriskt fält läggs på systemet så att $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_z$ på stort avstånd. Hur ska σ_0 väljas så att $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_z$ i hela området utanför skalet, dvs så att fältet förblir opåverkat om klotet och skalet införs i mediet?

Ledning: Betrakta den elektrostatiska potentialen utanför skalet, $\Phi_0(\mathbf{r})$, i skalet, $\Phi_1(\mathbf{r})$, och inuti klotet, $\Phi_2(\mathbf{r})$. $\Phi_i(\mathbf{r})$, $i = 0,1,2$, uppfyller Laplaces ekvation. Villkoret att $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_z$ utanför skalet motsvarar att $\Phi_0(\mathbf{r}) = Er\cos\theta$. På randen mellan klotet och skalet skall potentialen anpassas så att

$$\begin{aligned} \Phi_2(\mathbf{r})_{r=R_2} &= \Phi_1(\mathbf{r})_{r=R_2} \\ \sigma_2\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\right)_{r=R_2} &= \sigma_1\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)_{r=R_2} \end{aligned}$$

och motsvarande på randen mellan skalet och det omgivande mediet.

5.29. En sfär med radie R och centrum i origo har potentialen V_0 då $z > 0$ och $-V_0$ då $z < 0$. För $r > R$ uppfyller potentialen Laplaces ekvation. Beräkna den dominerande termen i serieutvecklingen av potentialen på stort avstånd utanför sfären.

5.30. En sfär med radien R är placerad i en planparallell strömning av en ideal inkompressibel vätska. Hastigheten på stort avstånd utanför sfären antas vara v_∞. Sök hastighetsfältet på ändligt avstånd från sfären, uttryckt i ett sfäriskt koordinatsystem med z-axeln riktad motsatt strömningen. Hastighetsfältet uppfyller $\mathbf{v} = -\nabla\Phi$ och $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$. På sfären gäller $\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_r = 0$.

5.31. Bestäm gravitationspotentialen i den fria rymden kring en tunn cirkulär platta med massan M och radien R genom att integrera Laplaces ekvation i sfäriska koordinater och anpassa lösningen till potentialen på plattans axel. Gravitationskraften mellan två masspunkter m_1 och m_2 är

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

5.32. I ett oändligt homogent medium med konduktiviteten σ_m finns en sfärisk inneslutning av ett material, vars konduktivitet är σ_i. Sfären har radie R. Mediet befinner sig i ett elektriskt fält $\mathbf{E}$ sådant att

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_z, \quad r \to \infty.$$

Potentialen $\Phi(\mathbf{r})$, som är relaterad till $\mathbf{E}$ enligt $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, lyder Laplaces ekvation, $\Delta\Phi = 0$. Randvillkoret för $\mathbf{E}$ ovan innebär att

$$\Phi = -E_0 r \cos\theta, \quad r \to \infty.$$

På sfären är den radiella komponenten av strömmen

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_r = \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_r = -\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

kontinuerlig, och den tangentiella komponenten av elektriska fältet

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_\theta = -\frac{1}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$$

kontinuerlig.

Bestäm potentialen $\Phi(\mathbf{r})$ både innanför och utanför sfären.

5.33. På ett halvklot med radien R hålls den plana ytan vid temperaturen $T = 0$, medan den buktiga ytan har temperaturen T_1. Bestäm den stationära temperaturfördelningen.

Ledning:

$$\int P_\ell(x)dx = \frac{P_{\ell+1}(x) - P_{\ell-1}(x)}{2\ell + 1}$$

Sfäriska problem som är radiellt oberoende

5.34. Bestäm egensvängningarna och egenfrekvenserna hos ett sfäriskt skal med radie R. Svängningarna har våghastigheten c.

5.35. En stavformad molekyls orientering kan beskrivas av de två sfäriska koordinaterna θ och φ. Molekylen genomgår rotationsdiffusion vilket innebär att

$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) n(\theta,\varphi,t) - \frac{1}{D_R}\frac{\partial n(\theta,\varphi,t)}{\partial t} = 0$$

där D_R är en rotationsdiffusionskonstant och

$$n(\theta,\varphi,t)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

är sannolikheten att en molekyl har en orientering inom det lilla rymdvinkelelementet $\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ kring (θ,φ) vid tiden t.

a) Antag att molekylen har riktningen (θ_0,φ_0) vid tiden $t = 0$, dvs att begynnelsevillkoret är

$$n(\theta,\varphi,0) = \delta(\theta-\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\frac{1}{\sin\theta_0}.$$

Beräkna $n(\theta,\varphi,t)$ för $t>0$. Lösningen kan tolkas som den betingade sannolikheten att molekylen har riktningen (θ,φ) vid tiden t givet att den hade riktningen (θ_0,φ_0) vid tiden $t=0$.

b) Antag nu att alla begynnelseriktningar (θ_0,φ_0) är lika sannolika. Beräkna väntevärdet $\langle P_\ell(\cos\alpha)\rangle$, (som är en funktion av endast ℓ och t) genom att medelvärdesbilda över alla orienteringar (θ,φ) och (θ_0,φ_0). α är vinkeln mellan molekylens riktningar vid tidpunkterna $t=0$ och t.

Ledning: Utnyttja additionssatsen för klotytfunktionerna:

$$\frac{2\ell+1}{4\pi}P_\ell(\cos\alpha)=\sum_{m=-\ell}^{\ell}Y^*_{\ell m}(\theta,\varphi)Y_{\ell m}(\theta_0,\varphi_0)$$

Våg- och diffusionsekvationen i sfäriska koordinater

5.36. Professor Einstein tänker tillbaka på påskfirandet och vill teoretiskt beräkna koktiden för ett ägg. Han antar att värmeledningsekvationen gäller och betraktar ägget som ett homogent klot med radien R och värmediffusiviteten a. Ägget har förvarats under lång tid i kylskåpet med temperaturen T_0. Ägget kokas sedan i vatten med temperaturen T_1. Professorn antar att ägget är färdigkokt när temperaturen i äggets centrum är T_2. Bestäm temperaturfördelningen i ägget som funktion av tiden. Vilken koktid beräknar professorn? När han beräknar denna tar han bara med första termen i den serie han får[1].

5.37. En sfärisk behållare med radien R innehåller gas. Den har före tiden $t=0$ hastigheten $\mathbf{v}$ och gasen antas då vara i vila relativt behållaren. Vid $t=0$ kolliderar behållaren med en vägg och blir stående helt stilla. Bestäm svängningsförloppet i gasen för $t>0$. Hastighetspotentialen $\Phi(\mathbf{r},t)$ uppfyller vågekvationen med våghastigheten c, samt randvillkoret $\Phi_r(R,\theta,t)=0$. Ur hastighetspotentialen erhålls gasens hastighetsfördelning enligt $\mathbf{v}=\nabla\Phi$. Begynnelsevillkoren för Φ är $\Phi(r,\theta,0)=vr\cos\theta$ och $\Phi_t=0$.

Ledning: Det gäller att

$$x^{n+1}g_{n-1}(x)=\frac{d}{dx}(x^{n+1}g_n(x))$$

där $g_n(x)$ betecknar de sfäriska besselfunktionerna $j_n(x)$ och $n_n(x)$.

5.38. Neutrontätheten u inuti ett homogent klot (radie R) av ^{235}U antas lyda en diffusionsekvation med randvärde noll och med en källterm som härrör från fission. Ekvationen blir

$$\Delta u+\lambda u=\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}$$

a) Beräkna med denna teori den kritiska radien R_0, som definieras av att neutrontätheten växer obegränsat med tiden i ett klot med radie större än R_0 (atombomb).

b) För att experimentellt bestämma den kritiska radien, införs i klotets centrum en neutronkälla som producerar ett känt antal (N) neutroner per tidsenhet. Då ett stationärt tillstånd uppnåtts ($R<R_0$) mäts neutronflödet ut från klotet. Visa hur man ur detta värde beräknar R_0. Konstanten a, men ej konstanten λ, antas känd.

Ledning:

$$ru(\mathbf{r})\to\frac{N}{4\pi a},\ \text{då } r\to 0.$$

Neutronströmtätheten är $-a\nabla u$.

[1] Han kallas numera professor Steinei.

5.39. Ett nollgradigt homogent klot med radien R och värmediffusiviteten a placeras vid tiden $t = 0$ i ett strålningsfält så att dess yttemperatur hela tiden kommer att hålla värdet $T_0 \cos\theta$. Bestäm temperaturen i klotet som funktion av läge och tid. Temperaturen $u(\mathbf{r}, t)$ i klotet uppfyller diffusionsekvationen.
Ledning: Ansätt en lösning på formen

$$u(r, \theta, t) = f(r)\cos\theta + v(r, \theta, t).$$

Det gäller att

$$x^{n+1} g_{n-1}(x) = \frac{d}{dx}(x^{n+1} g_n(x))$$

där $g_n(x)$ betecknar de sfäriska besselfunktionerna $j_n(x)$ och $n_n(x)$.

Tvungna svängningar i sfäriska koordinater

5.40. I en kompressibel gas uppfyller *övertrycket* $u(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r}, t) - p_0$ vågekvationen, med ljudhastigheten c. Betrakta gasen innanför ett sfäriskt skal med radien R. Skalet vibrerar så att randvillkoret blir

$$u(R, \theta, t) = A\cos^3\theta \cos\omega t$$

Bestäm övertrycket som funktion av rum och tid, under antagandet att alla egensvängningar har dämpats ut. Antag att ω inte är en egenfrekvens.

Serieutveckling av inhomogeniteter

5.41. Jorden kan betraktas som ett homogent klot med radie R. Pga. naturlig radioaktivitet utvecklas värme i jordens inre. Antag att temperaturfältet uppfyller ekvationen

$$\Delta u - \frac{1}{a} u_t = -Ae^{-\mu t}$$

där a, A och μ är konstanter och t är tiden räknat från jordens skapelse. Beräkna temperaturförloppet om jordens temperatur var noll vid $t = 0$ och jordytans temperatur är noll för alla t. Förutsätt att temperaturfältet är sfäriskt symmetriskt.

5.42. En ledande sfär med radie R är jordad. Innanför sfären finns en rymdladdning $\rho(r, \theta) = q\sin(\pi r/R)\cos\theta$, där q är en konstant. Bestäm potentialen innanför sfären. Potentialen uppfyller Poissons ekvation

$$\Delta V(r, \theta) = -\frac{\rho(r, \theta)}{\epsilon_0}$$