# Lösningar

## Laplaces ekvation i polära koordinater

5.3. Problemet lyder

$$\Delta T = -\frac{h}{\lambda} = -\frac{\sigma E^2}{\lambda} = -\frac{(a - bT)V^2}{\lambda \ell^2}$$

eller

$$\Delta T - \frac{bV^2}{\lambda \ell^2} T = -\frac{aV^2}{\lambda \ell^2}$$

med RV $T(R) = T_0$. Pga rotationssymmetri beror $T$ bara av $r$.

Ansätt $T(r) = u(r) + a/b$. $u(r)$ uppfyller då

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{bV^2}{\lambda \ell^2} u = 0$$

med RV

$$u(R) = T_0 - \frac{a}{b}$$

Lösningen är

$$u(r) = AI_0(kr) + BK_0(kr), \quad k = \sqrt{\frac{bV^2}{\lambda \ell^2}}$$

$K_0$ är singulär i origo. $\Rightarrow B = 0$.

RV vid $r = R$ ger nu

$$A = \frac{T_0 - a/b}{I_0(kR)}$$

Således

$$T(r) = \left(T_0 - \frac{a}{b}\right)\frac{I_0(kr)}{I_0(kR)} + \frac{a}{b}$$

5.4. Problemet lyder

$$\Delta \Phi = 0$$

$$\text{RV:} \begin{cases} \Phi = -v_0 r \cos\varphi & r \to \infty \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 & r = R \end{cases}$$

RV för $r \to \infty$ gör att vi ansätter $\Phi(r, \varphi) = f(r)\cos\varphi$. Detta ger

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \frac{1}{r^2} f(r) = 0$$

$$\text{RV:} \begin{cases} f(r) = -v_0 r & r \to \infty \\ f'(R) = 0 \end{cases}$$

Ansätt $f(r) = r^s$. Det ger

$$s(s-1)r^{s-2} + sr^{s-2} - r^{s-2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad s(s-1)+s-1=0 \quad \Rightarrow \quad s=\pm 1$$

Således

$$f(r)=\frac{A}{r}+Br$$

RV vid $r\to\infty$ ger $B=-v_0$. $f'(R)=0$ ger sedan $A=-R^2 v_0$. dvs

$$\Phi(r,\varphi)=-v_0\left(\frac{R^2}{r}+r\right)\cos\varphi$$

Hastighetsfältet blir

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= -\nabla\Phi=-\frac{\partial\Phi}{\partial r}\mathbf{e}_r-\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi \\
&= v_0\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\varphi\mathbf{e}_r-v_0\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\varphi\mathbf{e}_\varphi \\
|\mathbf{v}| &= v_0\sqrt{1+\frac{R^4}{r^4}-2\frac{R^2}{r^2}\cos 2\varphi}
\end{aligned}$$

$|\mathbf{v}|$ antar max för $\varphi=\pi/2$ och $r=R$. $|\mathbf{v}|_{\max}=2v_0$.

5.5. Vi ska lösa ekvationen

$$\Delta V(r,z)=0,$$

med randvillkoren

$$\begin{cases} V(a,z)=V_0 \\ V(r,0)=0 \\ V(r,\ell)=0 \end{cases}$$

Vi ansätter $V(r,z)=f(r)g(z)$ och variabelseparerar. Detta ger

$$\begin{cases} g''(z)+k^2 g(z)=0 \\ g(0)=0 \\ g(\ell)=0 \end{cases}$$

vilket har lösningen

$$g_n(z)=\sin(k_n z), \qquad k_n=\frac{n\pi}{\ell}, \qquad n=1,2,3\ldots$$

För $f_n(r)$ får vi problemet

$$r^2 f_n''(r)+rf_n'(r)-k_n^2 r^2 f_n(r)=0,$$

som har lösningen

$$f_n(r)=A_n I_0(k_n r)+B_n K_0(k_n r).$$

Vi ser att $A_\ell = 0$, $B_\ell = 0$ för $\ell \neq 0, 2$. De övriga blir

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2R_2V_0}{3(R_2 - R_1)} \\ A_2 &= -\frac{2R_2^3V_0}{3(R_2^5 - R_1^5)} \\ B_0 &= -R_1A_0 \\ B_2 &= -R_1^5A_2 \end{aligned}$$

Således

$$V(r, \theta) = \frac{2R_2V_0}{3(R_2 - R_1)}\left(1 - \frac{R_1}{r}\right) - \frac{2R_2^3V_0}{3(R_2^5 - R_1^5)}\left(r^2 - \frac{R_1^5}{r^3}\right)P_2(\cos\theta)$$

5.26. Problemet lyder

$$\Delta u = 0$$

$$\text{RV: } u(R, \theta) = T_0 + \frac{T_1}{2}(1 - \cos\theta)$$

Allmän $\varphi$-oberoende lösning är (se uppg. 5.25)

$$u(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right)P_\ell(\cos\theta)$$

$B_\ell = 0$ pga singularitet i origo. Anpassa till RV.

$$\begin{aligned} u(R, \theta) &= T_0 + \frac{T_1}{2}(1 - \cos\theta) = \left(T_0 + \frac{T_1}{2}\right)P_0(\cos\theta) - \frac{T_1}{2}P_1(\cos\theta) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell R^\ell P_\ell(\cos\theta) \\ \Rightarrow \quad A_0 &= T_0 + \frac{T_1}{2} \\ A_1 &= -\frac{T_1}{2R} \end{aligned}$$

Således

$$u(r, \theta) = T_0 + \frac{T_1}{2} - T_1\frac{r}{2R}\cos\theta$$

5.27. Vi ska lösa ekvationen

$$\Delta V(r, \theta) = 0,$$

med randvillkoren

$$\begin{cases} V(a, \theta) = 0 \\ V(r \to 0, \theta) = q\dfrac{3\cos^2\theta - 1}{r^3} = \dfrac{2qP_2(\cos\theta)}{r^3} \end{cases}$$

Superponera.

$$\Phi(r,\theta,t)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}j_\ell(k_{\ell s}r)P_\ell(\cos\theta)(A_{\ell s}\sin(ck_{\ell s}t)+B_{\ell s}\cos(ck_{\ell s}t))$$

Anpassa till BV: $\Phi_t(r,\theta,0)=0\Rightarrow A_{\ell s}=0$.

$$\begin{aligned}\Phi(r,\theta,0) &= vr\cos\theta=vrP_1(\cos\theta)\\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}B_{\ell s}j_\ell(k_{\ell s}r)P_\ell(\cos\theta)\end{aligned}$$

Vi ser att $B_{\ell s}=0$ då $\ell\neq 1$ och att

$$\begin{aligned}B_{1s} &= \frac{(\Psi_{1s},vr)}{\|\Psi_{1s}\|^2}=v\frac{\int_0^R j_1(k_{1s}r)r^3dr}{\int_0^R j_1^2(k_{1s}r)r^2dr}\\ &= \frac{R^4j_2(\zeta_{1s})}{\zeta_{1s}}\frac{2}{R^3(1-2/\zeta_{1s}^2)j_1^2(\zeta_{1s})}=\frac{2Rj_2(\zeta_{1s})\zeta_{1s}}{(\zeta_{1s}-2)j_1^2(\zeta_{1s})}\end{aligned}$$

Således

$$\Phi(r,\theta,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{2Rj_2(\zeta_{1s})\zeta_{1s}}{(\zeta_{1s}-2)j_1^2(\zeta_{1s})}j_1(k_{1s}r)\cos\theta\cos(ck_{1s}t)$$

och

$$\mathbf{v}(\mathbf{r},t)=\nabla\Phi=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{2Rj_2(\zeta_{1s})\zeta_{1s}}{(\zeta_{1s}-2)j_1^2(\zeta_{1s})}\cos(ck_{1s}t)\left(\mathbf{e}_r\frac{\zeta_{1s}}{R}j_1'(k_{1s}r)\cos\theta-\mathbf{e}_\theta\frac{j_1(k_{1s}r)}{r}\sin\theta\right)$$

5.38. a) Problemet lyder

$$\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\lambda u(r,t)-\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

$$\text{RV: } u(R,t)=0$$

Ansätt $u(r,t)=f(r)g(t)$ och variabelseparera.

$$g'(t)+a(k^2-\lambda)g(t)=0,\quad g(t)=e^{-a(k^2-\lambda)t}$$

$$\begin{cases}r^2f''(r)+2rf'(r)+k^2r^2f(r)=0\\ f(R)=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad f(r)=Aj_0(kr)+Bn_0(kr)$$

$n_0$ är singulär i origo $\Rightarrow B=0$. RV $f(R)=0$ ger

$$j_0(kR)=0\quad\Rightarrow\quad\sin(kR)=0\quad\Rightarrow\quad k_n=\frac{n\pi}{R}$$

$u$ växer exponentiellt om $k_n^2 - \lambda < 0$ för något $n$. $n = 1$ ger minsta värdet.

$$\Rightarrow \quad R > \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$$

Den kritiska radien är således

$$R_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$$

b) Problemet lyder

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} + \lambda u(r) = 0$$

$$\text{RV:} \begin{cases} u(R) = 0 \\ ru(r) \to N/(4\pi a) \quad \text{då } r \to 0 \end{cases}$$

Lösningen är

$$u(r) = Aj_0(\sqrt{\lambda}r) + Bn_0(\sqrt{\lambda}r) = A'\frac{\sin(\sqrt{\lambda}r)}{r} + B'\frac{\cos(\sqrt{\lambda}r)}{r}$$

RV vid $r = 0$ ger

$$B' = \frac{N}{4\pi a}$$

RV $u(R) = 0$ ger

$$A' = -\frac{N}{4\pi a}\cot(\sqrt{\lambda}R)$$

Således

$$u(r) = \frac{N}{4\pi a r}(-\cot(\sqrt{\lambda}R)\sin(\sqrt{\lambda}r) + \cos(\sqrt{\lambda}r))$$

Neutronflödet är

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_N &= -a\nabla u = -a\frac{du}{dr}\mathbf{e}_r \\ &= \frac{N}{4\pi r}\left(\cot(\sqrt{\lambda}R)\left(\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}r) - \frac{\sin(\sqrt{\lambda}r)}{r}\right) + \sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}r) + \frac{\cos(\sqrt{\lambda}r)}{r}\right)\mathbf{e}_r \end{aligned}$$

På ytan $r = R$ är

$$\mathbf{J}_N = \frac{N\sqrt{\lambda}}{4\pi R\sin(\sqrt{\lambda}R)}\mathbf{e}_r$$

Flödet blir

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_S \mathbf{J}_N \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{N\sqrt{\lambda}}{4\pi R\sin(\sqrt{\lambda}R)}\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r dS \\ &= \frac{NR\sqrt{\lambda}}{\sin(\sqrt{\lambda}R)} \end{aligned}$$

Ur denna ekvation kan $\lambda$ bestämmas. Sedan kan $R_0 = \pi/\sqrt{\lambda}$ beräknas.

Ansätt $f(r,\theta) = \Psi(r)\Phi(\theta)$ och variabelseparera.

$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right)\Phi(\theta) + \ell(\ell+1)\Phi(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_\ell(\theta) = P_\ell(\cos\theta)$$

$$r^2\Psi''(r)+2r\Psi'(r)+\left(\frac{\omega^2}{c^2}r^2 - \ell(\ell+1)\right)\Psi(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Psi(r) = Bj_\ell\left(\frac{\omega}{c}r\right)+Cn_\ell\left(\frac{\omega}{c}r\right)$$

$n_\ell$ är singulär i origo $\Rightarrow C = 0$. Superponera.

$$f(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell j_\ell\left(\frac{\omega}{c}r\right)P_\ell(\cos\theta)$$

Anpassa till RV.

$$\begin{aligned}
f(R,\theta) &= A\cos^3\theta \\
&= \frac{3A}{5}P_1(\cos\theta) + \frac{2A}{5}P_3(\cos\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell j_\ell\left(\frac{\omega}{c}R\right)P_\ell(\cos\theta) \\
\Rightarrow \quad B_1 &= \frac{3A}{5j_1(\omega R/c)} \\
B_3 &= \frac{2A}{5j_3(\omega R/c)} \\
B_\ell &= 0, \quad \ell \neq 1, \ell \neq 3
\end{aligned}$$

Således

$$u(r,\theta,t) = \left(\frac{3A}{5}\frac{j_1(\omega r/c)}{j_1(\omega R/c)}P_1(\cos\theta) + \frac{2A}{5}\frac{j_3(\omega r/c)}{j_3(\omega R/c)}P_3(\cos\theta)\right)\cos\omega t$$

## Serieutveckling av inhomogeniteter

5.41. Problemet lyder

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} = -Ae^{-\mu t}$$

$$\text{RV: } u(R,t) = 0, \qquad \text{BV: } u(r,0) = 0$$

Utveckla $u$ i egenfunktioner till problemet

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dv}{dr} + k^2 v(r) = 0$$

$$\text{RV: } v(R) = 0$$

Lösningen till denna ekvation är

$$v(r) = Bj_0(kr) + Cn_0(kr)$$

$n_0$ är singulär i origo $\Rightarrow C = 0$. RV $v(R) = 0$ ger

$$j_0(kR) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(kR) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_n = \frac{n\pi}{R}$$

Egenfunktionerna är

$$v_n(r) = \frac{\sin(k_n r)}{r}$$

Utveckla

$$\begin{aligned} -Ae^{-\mu t} &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) v_n(r) \\ f_n(t) &= \frac{(v_n, -Ae^{-\mu t})}{\|v_n\|^2} = -Ae^{-\mu t} \frac{\int_0^R \sin(k_n r) r\, dr}{\int_0^R \sin^2(k_n r) dr} \\ &= \frac{2AR(-1)^n}{\pi n} e^{-\mu t} \end{aligned}$$

Ansätt

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) v_n(r)$$

Insatt i ekvationen för $u$ ger detta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( -k_n^2 g_n(t) - \frac{1}{a} g_n'(t) \right) v_n(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2AR(-1)^n}{\pi n} e^{-\mu t} v_n(r)$$

Termvis likhet ger följande lösning för $g_n(t)$:

$$g_n(t) = A_n e^{-a k_n^2 t} + \frac{(-1)^n 2AR}{n\pi \left( \frac{\mu}{a} - k_n^2 \right)} e^{-\mu t}$$

BV $u(r,0) = 0$ ger

$$A_n = -\frac{(-1)^n 2AR}{n\pi \left( \frac{\mu}{a} - k_n^2 \right)}$$

Således

$$u(r,t) = \frac{2AR}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \left( \frac{\mu}{a} - \left( \frac{n\pi}{R} \right)^2 \right)} \left( e^{-\mu t} - e^{-a(n\pi/R)^2 t} \right) \frac{\sin\left( \frac{n\pi}{R} r \right)}{r}$$

5.42. Problemet lyder

$$\Delta V = -\frac{q}{\epsilon_0} \sin\left( \frac{\pi r}{R} \right) \cos\theta$$

$$\text{RV: } V(R,\theta) = 0$$