# Lösningar

# 3 Fundamentala lösningsmetoder

## d'Alemberts lösning av vågekvationen

3.1. Problemet lyder

$$\begin{array}{lll} \text{PDE} & u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = 0 & 0 \le x < \infty \\ \text{RV} & u(0,t) = 0 & \\ \text{BV} & u(x, t \ll 0) = \alpha(x+ct) & \end{array}$$

Observera att vi egentligen behöver två begynnelsevillkor för vågekvationen. Här kan vi alltså inte ange tidsberoendet hos en lösning, men kanske kvalitativt beskriva vad som händer. Den allmänna lösningen till vågekvationen

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = 0$$

är enligt d'Alembert

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

Villkoret för stora negativa $t$ ger att $f(\xi) = \alpha(\xi)$. Vågen $g(x-ct)$ har då ännu inte hunnit fram till intervallet $0 \le x < \infty$. Den bestäms ur randvillkoret $u(0,t) = 0$, dvs

$$u(0,t) = \alpha(ct) + g(-ct) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(\xi) = -\alpha(-\xi)$$

Således är

$$u(x,t) = \alpha(x+ct) - \alpha(-x+ct)$$

Den infallande vågen reflekteras och amplituden byter tecken.

3.2. Problemets uppställning är

$$\begin{array}{lll} \text{PDE} & u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = 0 & 0 \le x < \infty \\ \text{RV} & u_x(0,t) = \frac{k}{S}u_t(0,t) & \\ \text{BV} & u(x, t \ll 0) = \alpha(x+ct) & \end{array}$$

Den allmänna lösningen till vågekvationen är

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

För stora negativa tider gäller $u(x,t) = \alpha(x+ct)$, dvs $f(\xi) = \alpha(\xi)$. Randvillkoret vid $x = 0$ ger nu

$$\begin{aligned} S(\alpha'(ct) + g'(-ct)) &= kc(\alpha'(ct) - g'(-ct)) \\ \Rightarrow \quad g'(\xi) &= \frac{kc - S}{kc + S}\alpha'(-\xi) \\ \Rightarrow \quad g(\xi) &= \frac{S - kc}{S + kc}\alpha(-\xi) + A \end{aligned}$$

För stora negativa tider gäller $u(0,t) = 0$, dvs

$$u(0,t) = \alpha(ct) + g(-ct) = 0 + A = 0$$

dvs $A = 0$.

Slutligen

$$u(x,t) = \alpha(x+ct) + \frac{S-kc}{S+kc}\alpha(-x+ct)$$

Då $k = \infty$, vilket motsvarar en fast inspänd sträng, får vi

$$u(x,t) = \alpha(x+ct) - \alpha(-x+ct)$$

Den infallande vågen reflekteras och amplituden byter tecken.

Då $k = 0$ får vi

$$u(x,t) = \alpha(x+ct) + \alpha(-x+ct)$$

Den reflekterade vågen byter inte tecken.

Då $k = S/c$ får vi

$$u(x,t) = \alpha(x+ct)$$

dvs ingen reflexion alls.

## Produktmetoden, homogena problem

3.3. Vi börjar som vanligt med uppställningen:

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = 0 \quad 0 \le x \le \ell \\ \text{RV} & u(0,t) = 0 \\ & u(\ell,t) = 0 \\ \text{BV} & u(x,0) = \alpha(x) \\ & u_t(x,0) = 0 \end{array}$$

Vi börjar med att använda produktmetoden på vågekvationen genom ansatsen $u(x,t) = f(x)g(t)$. Insatt i vågekvationen ger detta

$$\frac{f''}{f} = \frac{1}{c^2}\frac{g''}{g} = -k^2$$

Genom att sätta konstanten till en negativ kvadrat är vi säkra på att den alltid är negativ, så att vi garanterat får våglösningar.

Problemet för $f(x)$ blir tillsammans med randvillkoren

$$\begin{cases} f''(x) + k^2 f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f(\ell) = 0 \end{cases}$$

som har lösningen

$$f_n(x) = \sin k_n x, \quad k_n = \frac{n\pi}{\ell} \quad n = 1, 2, 3\ldots$$

Ekvationen för $g_n$ är

$$\begin{aligned} & g_n''(t) + c^2 k_n^2 g_n(t) = 0 \\ \Rightarrow \quad & g_n(t) = A_n \sin(k_n ct) + B_n \cos(k_n ct) \end{aligned}$$

Superponera

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin(k_n ct) + B_n \cos(k_n ct)) \sin(k_n x) \end{aligned}$$

Anpassa till BV:

$$\begin{aligned} u_t(x,0) &= 0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n k_n c \sin(k_n x) \quad \Rightarrow \quad A_n = 0 \\ u(x,0) &= \alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(k_n x) \\ \Rightarrow \quad B_n &= \frac{(f_n, \alpha)}{\|f_n\|^2} = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f_n(x) \alpha(x) dx = \frac{9\epsilon}{(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Således

$$u(x,t) = \frac{9\epsilon}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell} ct\right)$$

3.4. Problemet lyder

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0 \quad 0 \le x \le \ell \\ \text{RV} & u(0,t) = 0 \\ & u(\ell,t) = 0 \\ \text{BV} & u(x,0) = 0 \\ & u_t(x,0) = \beta(x) \end{array}$$

Variabelseparation ger lösningen (se uppgift 3.1)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin(k_n ct) + B_n \cos(k_n ct)) \sin(k_n x) \quad k_n = \frac{n\pi}{\ell} \quad n = 1, 2, 3\ldots$$

Anpassa till BV. Låt $f_n(x) = \sin(k_n x)$.

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= 0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(k_n x) \quad \Rightarrow \quad B_n = 0 \\
u_t(x,0) &= \beta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n k_n c \sin(k_n x) \\
\Rightarrow \quad A_n &= \frac{1}{k_n c} \frac{(f_n, \beta)}{\|f_n\|^2} = \frac{2}{k_n c \ell} \int_0^{\ell} f_n(x) \beta(x) dx \\
&= \frac{8\epsilon \ell^2}{n^3 \pi^3 c \delta} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi\delta}{2\ell}\right)
\end{aligned}
$$

Således

$$
u(x,t) = \frac{8\epsilon\ell^2}{\pi^3 c\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \sin^2\left(\frac{(2n+1)\pi\delta}{2\ell}\right) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{\ell} ct\right) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{\ell}\right)
$$

3.5. Problemet lyder

$$
\begin{array}{lll}
\text{PDE} & u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0 & 0 \le x \le \ell \\
\text{RV} & u(0,t) = 0 & \\
 & u_x(\ell,t) = 0 & \\
\text{BV} & u(x,0) = \alpha(x) = \begin{cases} \epsilon x/(\ell - a) & 0 \le x \le \ell - a \\ \epsilon & \ell - a \le x \le \ell \end{cases} & \\
\text{BV} & u_t(x,0) = 0 &
\end{array}
$$

Randvillkoret vid $x = \ell$ fås ur rörelseekvationen för den lätta ringen.

Ansätt $u(x,t) = f(x)g(t)$. Detta ger

$$
g''(t) + k^2 c^2 g(t) = 0
$$

$$
\begin{cases} f''(x) + k^2 f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f'(\ell) = 0 \end{cases}
$$

med lösningarna

$$
f_n(x) = \sin(k_n x) \quad k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2\ell} \quad n = 0, 1, 2, 3 \ldots
$$

$$
g_n(t) = A_n \sin(k_n ct) + B_n \cos(k_n ct)
$$

Superponera

$$
u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \sin(k_n ct) + B_n \cos(k_n ct)) \sin(k_n x)
$$

Anpassa till BV:

$$\begin{aligned}
u_t(x,0) &= 0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n k_n c \sin(k_n x) \quad \Rightarrow \quad A_n = 0 \\
u(x,0) &= \alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(k_n x) \\
\Rightarrow \quad B_n &= \frac{(f_n,\alpha)}{\|f_n\|^2} = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \sin(k_n x)\alpha(x)dx \\
&= \frac{8\epsilon\ell}{(\ell-a)(2n+1)^2\pi^2}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi(\ell-a)}{2\ell}\right)
\end{aligned}$$

Således

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{8\epsilon\ell}{(\ell-a)\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi(\ell-a)}{2\ell}\right) \\
&\quad \times \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}ct\right)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}\right)
\end{aligned}$$

3.6. Problemet lyder

$$\begin{array}{lll}
\text{PDE} & u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = 0 & 0 \le x \le \ell \\
\text{RV} & u_x(0,t) = 0 & \\
 & u_x(\ell,t) = 0 & \\
\text{BV} & u(x,0) = 0 & \\
 & u_t(x,0) = v_0\left(1 - \cos\frac{\pi x}{\ell}\right) &
\end{array}$$

Ansätt $u(x,t) = f(x)g(t)$. Detta ger

$$g''(t) + k^2c^2g(t) = 0$$

$$\begin{cases} f''(x) + k^2 f(x) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f'(\ell) = 0 \end{cases}$$

med lösningarna

$$f_n(x) = \cos(k_n x) \quad k_n = \frac{n\pi}{\ell} \quad n = 0,1,2,3\ldots$$

$$g_n(t) = \begin{cases} A_0 t + B_0 & n = 0 \\ A_n \sin(k_n ct) + B_n\cos(k_n ct) & n = 1,2,\ldots \end{cases}$$

Superponera

$$u(x,t) = A_0 t + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\sin(k_n ct) + B_n\cos(k_n ct))\cos(k_n x)$$

Anpassa till BV:

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= 0 = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(k_n x) \quad \Rightarrow \quad B_n = 0 \\
u_t(x,0) &= v_0\left(1 - \cos\frac{\pi x}{\ell}\right) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n k_n c \cos(k_n x) \\
\Rightarrow \quad A_0 &= v_0, \quad A_1 = -\frac{v_0 \ell}{\pi c}, \quad A_n = 0, \quad n = 2, 3, \ldots
\end{aligned}
$$

Således

$$
u(x,t) = v_0\left(t - \frac{\ell}{\pi c}\cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\sin\left(\frac{\pi c}{\ell}t\right)\right)
$$

3.7. Här är vi bara intresserade av egenfunktionerna, så vi behöver inte genomföra hela lösningen på vanligt sätt! Vi vet att vågekvationen har lösningar på formen

$$
u(x,t) = f(x)\cos\omega t
$$

där $f$ uppfyller

$$
f''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 f(x) = 0, \quad c^2 = \frac{S}{\rho}
$$

Utan humla gäller RV $f(0) = f(2\ell) = 0$, vilket ger

$$
f_n(x) = \sin\left(\frac{\omega_n x}{c}\right), \quad \omega_n = \frac{cn\pi}{2\ell}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots
$$

Grundfrekvensen är $\omega_1 = c\pi/(2\ell)$.

Med humla gäller RV

$$
u(0,t) = 0
$$

$$
m u_{tt}(\ell,t) = -2S u_x(\ell,t)
$$

Det andra RV fås ur kraftekvationen för humlan.

RV $u(0,t) = 0$ ger oss $f(x) = \sin(\omega x/c)$. Det andra RV ger

$$
m\omega^2 \sin\left(\frac{\omega\ell}{c}\right) = 2S\frac{\omega}{c}\cos\left(\frac{\omega\ell}{c}\right) \tag{1}
$$

Grundfrekvensen $\omega_1/2 = c\pi/(4\ell)$ ska uppfylla denna ekvation.

$$
\Rightarrow \quad m = \frac{8S\ell}{\pi c^2} = \frac{8}{\pi}\rho\ell
$$

Övertonerna blir ej harmoniska ty $\omega_n = nc\pi/(4\ell)$ uppfyller ej (1) för $n > 1$.

3.8. Problemet lyder

$$
\begin{array}{lll}
\text{PDE} & u_{xx} - \frac{1}{D} u_t = 0 = 0 & 0 \le x \le h \\
\text{RV} & u_x(0,t) = 0 & \\
 & u_x(h,t) = 0 & \\
\text{BV} & u(x,0) = \alpha(x) = \begin{cases} C_0 & 0 \le x \le h/2 \\ 0 & h/2 \le x \le h \end{cases} &
\end{array}
$$

Ansätt $u(x,t) = f(x)g(t)$. Detta ger

$$g'(t) + k^2 D g(t) = 0$$

$$\begin{cases} f''(x) + k^2 f(x) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f'(h) = 0 \end{cases}$$

med lösningarna

$$f_n(x) = \cos(k_n x) \quad k_n = \frac{n\pi}{h} \quad n = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

$$g_n(t) = A_n e^{-k_n^2 D t}$$

Superponera

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(k_n x) e^{-k_n^2 D t}$$

Anpassa till BV:

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= \alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(k_n x) \\
\Rightarrow \quad A_0 &= \frac{(f_0, \alpha)}{\|f_0\|^2} = \frac{1}{h} \int_0^h \alpha(x) dx = \frac{C_0}{2} \\
A_n &= \frac{(f_n, \alpha)}{\|f_n\|^2} = \frac{2}{h} \int_0^h \cos(k_n x) \alpha(x) dx = \frac{2C_0}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Således

$$u(x,t) = \frac{C_0}{2} + \frac{2C_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{h}\right) e^{-((2n+1)\pi/h)^2 D t}$$

Koncentrationen vid botten blir

$$u(h,t) = \frac{C_0}{2} - \frac{2C_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} e^{-((2n+1)\pi/h)^2 D t}$$

3.9. Problemet lyder

$$\begin{array}{lll} \text{PDE} & u_{xx} - \frac{1}{D}u_t = 0 & 0 \le x \le h \\ \text{RV} & u(0,t) = 0 & \\ & u_x(h,t) = 0 & \\ \text{BV} & u(x,0) = \alpha(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 9h/10 \\ C_0 & 9h/10 \le x \le h \end{cases} & C_0 = 10 \text{ g/liter} \end{array}$$

Ansätt $u(x,t) = f(x)g(t)$. Detta ger

$$g'(t) + k^2 D g(t) = 0$$

$$\begin{cases} f''(x) + k^2 f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f'(h) = 0 \end{cases}$$

med lösningarna

$$f_n(x) = \sin(k_n x) \quad k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2h} \quad n = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

$$g_n(t) = A_n e^{-k_n^2 D t}$$

Superponera

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(k_n x) e^{-k_n^2 D t}$$

Anpassa till BV:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(k_n x) \\ \Rightarrow \quad A_n &= \frac{(f_n, \alpha)}{\|f_n\|^2} = \frac{2}{h}\int_0^h \sin(k_n x)\alpha(x)dx = \frac{4C_0}{(2n+1)\pi}\cos\left(\frac{(2n+1)9\pi}{20}\right) \end{aligned}$$

Således

$$u(x,t) = \frac{4C_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\cos\left(\frac{(2n+1)9\pi}{20}\right)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2h}\right)e^{-k_n^2 D t}$$

Om behållarens tvärsnittsarea är $S$ ($Sh = 1$ liter) så blir den sökta färgämnesmängden

$$\begin{aligned} M(t) &= S\int_0^h u(x,t)dx = S\sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^h \sin(k_n x)dx\, e^{-Dk_n^2 t} \\ &= ShC_0\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\left(\frac{(2n+1)9\pi}{20}\right)e^{-k_n^2 D t} \end{aligned}$$

3.10. Problemet lyder

$$\begin{array}{lll} \text{PDE} & u_{xx} - \frac{1}{a}u_t = 0 & 0 \le x \le 3\ell \\ \text{RV} & u(0,t) = 0 & \\ & u(3\ell,t) = 0 & \\ \text{BV} & u(x,0) = \alpha(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le \ell \\ 100 & \ell \le x \le 2\ell \\ 0 & 2\ell \le x \le 3\ell \end{cases} & \end{array}$$

Ansätt $u(x,t) = f(x)g(t)$. Detta ger

$$g'(t) + k^2 a g(t) = 0$$

$$\begin{cases} f''(x) + k^2 f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f(3\ell) = 0 \end{cases}$$

med lösningarna

$$f_n(x) = \sin(k_n x) \quad k_n = \frac{n\pi}{3\ell} \quad n = 1,2,3\ldots$$

$$g_n(t) = A_n e^{-k_n^2 at}$$

Superponera

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) e^{-k_n^2 at}$$

Anpassa till BV:

$$\begin{array}{rcl} u(x,0) & = & \alpha(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) \\ \Rightarrow \quad A_n & = & \dfrac{(f_n,\alpha)}{\|f_n\|^2} = \dfrac{2}{3\ell}\displaystyle\int_0^{3\ell} \sin(k_n x)\alpha(x)dx = \dfrac{200}{n\pi}\left(\cos\dfrac{n\pi}{3} - \cos\dfrac{2n\pi}{3}\right) \end{array}$$

Således

$$u(x,t) = \frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{2n\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{3\ell}\right)e^{-a(n\pi/(3\ell))^2 t}$$

3.11. Vi ska lösa problemet

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad 0 \le x \le \ell \\ \text{RV} & u(0,t) = 0 \\ & u(\ell,t) = 0 \\ \text{BV} & u(x,0) = N_0 \end{array}$$

Vi ansätter $u(x,t) = f(x)g(t)$ och variabelseparerar. Detta ger

$$\begin{cases} f''(x) + k^2 f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f(\ell) = 0 \end{cases}$$

vilket har lösningen

$$f_n(x) = \sin(k_n x), \qquad k_n = \frac{n\pi}{\ell}, \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

För $g_n(t)$ får vi problemet

$$g_n'(t) + a(k_n^2 - \lambda)g_n(t) = 0,$$

med lösningen

$$g_n(t) = A_n e^{-a(k_n^2-\lambda)t}.$$

Superponera lösningarna

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) e^{-a(k_n^2-\lambda)t}.$$

Begynnelsevillkoret ger oss

$$u(x,0) = N_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x)$$

En fourierserie med basfunktionerna $\sin(k_n x)$. Koefficienterna ges av

$$A_n = \frac{2N_0}{\ell}\int_0^{\ell} \sin(k_n x)\,dx = \begin{cases} 0 & n \text{ jämnt} \\ \frac{4N_0}{n\pi} & n \text{ udda} \end{cases}$$

Sammanfattningsvis blir lösningen

$$u(x,t) = \frac{4N_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \sin(k_{2n+1}x) e^{-a(k_{2n+1}^2-\lambda)t}.$$

Att $u$ ej växer obegränsat med tiden betyder att

$$k_n^2 - \lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda < \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}, \quad n = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda < \frac{\pi^2}{\ell^2}.$$

## Inhomogena problem

3.12. Vi ska lösa ekvationen

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \le x \le \ell \\ \text{RV} & V(0,t) = 0 \\ & V(\ell,t) = V_0 \\ \text{BV} & V(x,0) = 0 \\ & V_t(x,0) = 0 \end{array}$$

Substitutionen

$$V(x,t) = V_0\frac{x}{\ell} + U(x,t)$$

ger följande problem för $U$,

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \le x \le \ell \\ \text{RV} & U(0,t) = 0 \\ & U(\ell,t) = 0 \\ \text{BV} & U(x,0) = -V_0\frac{x}{\ell} \\ & U_t(x,0) = 0 \end{array}$$

Vi ansätter $U(x,t) = f(x)g(t)$ och variabelseparerar. Detta ger

$$\begin{cases} f''(x) + k^2 f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f(\ell) = 0 \end{cases}$$

vilket har lösningen

$$f_n(x) = \sin(k_n x), \qquad k_n = \frac{n\pi}{\ell}, \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

För $g_n(t)$ får vi problemet

$$g_n''(t) + c^2 k_n^2 g_n(t) = 0,$$

med lösningen

$$g_n(t) = A_n \cos(ck_n t) + B_n \sin(ck_n t).$$

Superponera lösningarna

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(ck_n t) + B_n \sin(ck_n t)) \sin(k_n x).$$

Begynnelsevillkoren ger oss

$$U_t(x,0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n k_n c \sin(k_n x) \quad \Rightarrow \quad B_n = 0$$

och
$$U(x,0) = -V_0\frac{x}{\ell} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x).$$
En fourierserie med basfunktionerna $\sin(k_n x)$. Koefficienterna ges av
$$A_n = \frac{-2V_0}{\ell^2}\int_0^\ell x\sin(k_n x)\,dx = (-1)^n\frac{2V_0}{n\pi}.$$
Sammanfattningsvis blir lösningen
$$V(x,t) = V_0\frac{x}{\ell} + \frac{2V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(k_n x)\cos(ck_n t).$$

3.13. Problemet lyder

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = -\frac{g}{c^2} \quad 0 \le x \le \ell \\ \text{RV} & u(0,t) = 0 \\ & u_x(\ell,t) = 0 \\ \text{BV} & u(x,0) = 0 \\ & u_t(x,0) = 0 \end{array}$$

Ansätt $u(x,t) = U(x) + v(x,t)$. Låt $U(x)$ ta hand om inhomogeniteten. Låt $U(x)$ uppfylla

$$\begin{cases} U''(x) = -g/c^2 \\ U(0) = 0 \\ U'(\ell) = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad U(x) = \frac{g}{2c^2}x(2\ell - x)$$

För att $u(x,t) = U(x) + v(x,t)$ ska uppfylla det ursprungliga problemet måste $v(x,t)$ uppfylla

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & v_{xx} - \frac{1}{c^2}v_{tt} = 0 \qquad 0 \le x \le \ell \\ \text{RV} & v(0,t) = 0 \\ & v_x(\ell,t) = 0 \\ \text{BV} & v(x,0) = -U(x) \\ & v_t(x,0) = 0 \end{array}$$

Variabelseparation ger nu
$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n\sin(k_n ct) + B_n\cos(k_n ct))\sin(k_n x)$$
$$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2\ell} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Anpassa till BV: Låt $f_n(x) = \sin(k_n x)$.

$$\begin{aligned}
v_t(x,0) &= 0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n k_n c \sin(k_n x) \quad \Rightarrow \quad A_n = 0 \\
v(x,0) &= -U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(k_n x) \\
\Rightarrow \quad B_n &= \frac{(f_n, -U)}{\|f_n\|^2} = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \sin(k_n x)\frac{g}{2c^2}x(x-2\ell)dx \\
&= -\frac{16\ell^2 g}{c^2(2n+1)^3\pi^3}
\end{aligned}$$

Således

$$u(x,t) = \frac{g}{2c^2}x(2\ell - x) - \frac{16\ell^2 g}{c^2\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\sin(k_n x)\cos(k_n ct)$$

3.14. Problemet lyder

$$\begin{array}{ll}
\text{PDE} & u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = 0 \quad 0 \le x \le \ell \\
\text{RV} & u(0,t) = 0 \\
 & u_x(\ell,t) = F/S \\
\text{BV} & u(x,0) = 0 \\
 & u_t(x,0) = 0
\end{array}$$

Ansätt $u(x,t) = U(x) + v(x,t)$. Låt $U(x)$ ta hand om inhomogeniteten. Låt $U(x)$ uppfylla

$$\begin{cases} U''(x) = 0 \\ U(0) = 0 \\ U'(\ell) = F/S \end{cases} \quad \Rightarrow \quad U(x) = \frac{Fx}{S}$$

För att $u(x,t) = U(x) + v(x,t)$ ska uppfylla det ursprungliga problemet måste $v(x,t)$ uppfylla

$$\begin{array}{ll}
\text{PDE} & v_{xx} - \frac{1}{c^2}v_{tt} = 0 \quad 0 \le x \le \ell \\
\text{RV} & v(0,t) = 0 \\
 & v_x(\ell,t) = 0 \\
\text{BV} & v(x,0) = -U(x) \\
 & v_t(x,0) = 0
\end{array}$$

Variabelseparation ger nu

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n \sin(k_n ct) + B_n \cos(k_n ct))\sin(k_n x)$$

$$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2\ell} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Anpassa till BV: Låt $f_n(x) = \sin(k_n x)$.

$$\begin{aligned} v_t(x,0) &= 0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n k_n c \sin(k_n x) \quad \Rightarrow \quad A_n = 0 \\ v(x,0) &= -U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(k_n x) \\ \Rightarrow \quad B_n &= \frac{(f_n, -U)}{\|f_n\|^2} = -\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \sin(k_n x)\frac{Fx}{S}dx \\ &= -\frac{8F\ell(-1)^n}{S\pi^2(2n+1)^2} \end{aligned}$$

Således

$$u(x,t) = \frac{F}{S}\left(x - \frac{8\ell}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin(k_n x)\cos(k_n ct)\right)$$

3.15. Problemet lyder

$$\begin{array}{lll} \text{PDE} & u_{xx} - \frac{1}{a}u_t = 0 & 0 \le x \le \ell \\ \text{RV} & u(0,t) = T_0 & \\ & u_x(\ell,t) = 0 & \\ \text{BV} & u(x,0) = \alpha(x) = T_0\frac{(\ell - x)}{\ell} & \end{array}$$

Begynnelsevillkoret fås genom att lösa det stationära problemet: $\alpha''(x) = 0$, $\alpha(0) = T_0$, $\alpha(\ell) = 0$.

Ansätt $u(x,t) = U(x) + v(x,t)$. Låt $U(x)$ ta hand om inhomogeniteten. Låt $U(x)$ uppfylla

$$\begin{cases} U''(x) = 0 \\ U(0) = T_0 \\ U'(\ell) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad U(x) = T_0$$

För att $u(x,t) = U(x) + v(x,t)$ ska uppfylla det ursprungliga problemet måste $v(x,t)$ uppfylla

$$\begin{array}{lll} \text{PDE} & v_{xx} - \frac{1}{a}v_t = 0 & 0 \le x \le \ell \\ \text{RV} & v(0,t) = 0 & \\ & v_x(\ell,t) = 0 & \\ \text{BV} & v(x,0) = u(x,0) - U(x) = -\frac{T_0 x}{\ell} = \beta(x) & \end{array}$$

Variabelseparation ger nu

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(k_n x) e^{-ak_n^2 t}, \quad k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2\ell} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Anpassa till BV: Låt $f_n(x) = \sin(k_n x)$.

$$\begin{aligned} v(x,0) &= \beta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(k_n x) \\ \Rightarrow \quad A_n &= \frac{(f_n,\beta)}{\|f_n\|^2} = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \sin(k_n x)\beta(x)dx \\ &= -\frac{8T_0(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2} \end{aligned}$$

Således

$$u(x,t) = T_0\left(1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin(k_n x)e^{-ak_n^2 t}\right)$$

3.16. Problemet lyder

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & u_{xx} - \frac{1}{a}u_t = -\frac{h}{\lambda A} \quad 0 \le x \le \ell \\ \text{RV} & u_x(0,t) = 0 \\ & u(\ell,t) = T_0 \\ \text{BV} & u(x,0) = T_0 \end{array}$$

Ansätt $u(x,t) = U(x) + v(x,t)$. Låt $U(x)$ ta hand om inhomogeniteten. Låt $U(x)$ uppfylla

$$\begin{cases} U''(x) = -\frac{h}{\lambda A} \\ U'(0) = 0 \\ U(\ell) = T_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad U(x) = T_0 + \frac{h}{2\lambda A}(\ell^2 - x^2)$$

För att $u(x,t) = U(x) + v(x,t)$ ska uppfylla det ursprungliga problemet måste $v(x,t)$ uppfylla

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & v_{xx} - \frac{1}{a}v_t = 0 \qquad\qquad 0 \le x \le \ell \\ \text{RV} & v_x(0,t) = 0 \\ & v(\ell,t) = 0 \\ \text{BV} & v(x,0) = u(x,0) - U(x) = -\frac{h}{2\lambda A}(\ell^2 - x^2) = \beta(x) \end{array}$$

Variabelseparation ger nu

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(k_n x)e^{-ak_n^2 t}, \quad k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2\ell} \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Anpassa till BV: Låt $f_n(x) = \cos(k_n x)$.

$$\begin{aligned} v(x,0) &= \beta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(k_n x) \\ \Rightarrow \quad B_n &= \frac{(f_n,\beta)}{\|f_n\|^2} = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \cos(k_n x)\beta(x)dx \\ &= -\frac{16h\ell^2(-1)^n}{\lambda A\pi^3(2n+1)^3} \end{aligned}$$

Således

$$u(x,t) = T_0 + \frac{h}{2\lambda A}(\ell^2 - x^2) - \frac{16h\ell^2}{\lambda A \pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\cos(k_n x)e^{-ak_n^2 t}$$

Effekten som strömmar ut genom ytan $x = \ell$ är

$$P = -A\lambda u_x(\ell,t) = h\ell\left(1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}e^{-ak_n^2 t}\right)$$

3.17. Problemet lyder

$$\begin{array}{lll} \text{PDE} & u_{xx} - \frac{1}{a}u_t = 0 & 0 \le x \le \ell \\ \text{RV} & u_x(0,t) = 0 & \\ & u_x(\ell,t) = Q/(A\lambda) & \\ \text{BV} & u(x,0) = 0 & \end{array}$$

Ansätt $u(x,t) = U(x) + V(t) + v(x,t)$. Låt $U(x) + V(t)$ ta hand om inhomogeniteten. Låt $U(x) + V(t)$ uppfylla

$$\begin{cases} U''(x) - \frac{1}{a}V'(t) = 0 \\ U'(0) = 0 \\ U'(\ell) = Q/(A\lambda) \end{cases}$$

Variabelseparera.

$$U''(x) = \frac{1}{a}V'(t) = \mu$$

$$U''(x) = \mu \quad \text{och RV} \quad \Rightarrow \quad U(x) = \frac{Q}{2\ell A\lambda}x^2, \quad \mu = \frac{Q}{\ell A\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad V(t) = \frac{Qa}{\ell A\lambda}t$$

Vi har här satt två integrationskonstanter $= 0$.

För att $u(x,t) = U(x) + V(t) + v(x,t)$ ska uppfylla det ursprungliga problemet måste $v(x,t)$ uppfylla

$$\begin{array}{lll} \text{PDE} & v_{xx} - \frac{1}{a}v_t = 0 & 0 \le x \le \ell \\ \text{RV} & v_x(0,t) = 0 & \\ & v_x(\ell,t) = 0 & \\ \text{BV} & v(x,0) = -U(x) & \end{array}$$

Variabelseparation ger nu

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(k_n x)e^{-ak_n^2 t}, \quad k_n = \frac{n\pi}{\ell} \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Anpassa till BV: Låt $f_n(x) = \cos(k_n x)$.

$$\begin{aligned}
v(x,0) &= -U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(k_n x) \\
\Rightarrow \quad B_0 &= \frac{(f_0, -U)}{\|f_0\|^2} = -\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} \frac{Q}{2\ell A\lambda} x^2 dx = -\frac{Q\ell}{6A\lambda} \\
B_n &= \frac{(f_n, -U)}{\|f_n\|^2} = -\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \cos(k_n x) U(x) dx \\
&= -\frac{2Q\ell(-1)^n}{A\lambda\pi^2 n^2}
\end{aligned}$$

Således

$$u(x,t) = \frac{Q}{\ell A\lambda}\left(at + \frac{x^2}{2} - \frac{\ell^2}{6} - \frac{2\ell^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(k_n x)e^{-ak_n^2 t}\right)$$

3.18. Problemet lyder

$$\begin{array}{lll}
\text{PDE} & u_{xx} - \frac{1}{a}u_t = -\frac{h}{\lambda A} & 0 \le x \le \ell \\
\text{RV} & u(0,t) = 0 & \\
 & u_x(\ell,t) = Q/(A\lambda) & \\
\text{BV} & u(x,0) = 0 &
\end{array}$$

Ansätt $u(x,t) = U(x) + v(x,t)$. Låt $U(x)$ ta hand om inhomogeniteten. Låt $U(x)$ uppfylla

$$\begin{cases} U''(x) = 0 \\ U(0) = 0 \\ U'(\ell) = Q/(A\lambda) \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad U(x) = \frac{Q}{A\lambda}x$$

För att $u(x,t) = U(x) + v(x,t)$ ska uppfylla det ursprungliga problemet måste $v(x,t)$ uppfylla

$$\begin{array}{lll}
\text{PDE} & v_{xx} - \frac{1}{a}v_t = 0 & 0 \le x \le \ell \\
\text{RV} & v(0,t) = 0 & \\
 & v_x(\ell,t) = 0 & \\
\text{BV} & v(x,0) = -U(x) &
\end{array}$$

Variabelseparation ger nu

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(k_n x)e^{-ak_n^2 t}, \quad k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2\ell} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Anpassa till BV: Låt $f_n(x) = \sin(k_n x)$.

$$\begin{aligned} v(x,0) &= -U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(k_n x) \\ \Rightarrow \quad B_n &= \frac{(f_n, -U)}{\|f_n\|^2} = -\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \sin(k_n x)\frac{Q}{A\lambda}x\,dx \\ &= -\frac{8Q\ell(-1)^n}{A\lambda\pi^2(2n+1)^2} \end{aligned}$$

Således

$$u(x,t) = \frac{Q}{A\lambda}\left(x - \frac{8\ell}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin(k_n x)e^{-ak_n^2 t}\right)$$

3.19. Problemet lyder

$$\begin{array}{lll} \text{PDE} & u_{xx} - \frac{1}{a}u_t = 0 & 0 \le x \le \ell \\ \text{RV} & u_x(0,t) = -Q/(A\lambda) & \\ & u_x(\ell,t) + \frac{\alpha}{A\lambda}u(\ell,t) = \alpha T_0/(A\lambda) & \\ \text{BV} & u(x,0) = 0 & \end{array}$$

Ansätt $u(x,t) = U(x) + v(x,t)$. Låt $U(x)$ ta hand om inhomogeniteten. Låt $U(x)$ uppfylla

$$\begin{cases} U''(x) = 0 \\ U'(0) = -Q/(A\lambda) \\ U'(\ell) + \frac{\alpha}{A\lambda}U(\ell) = \alpha T_0/(A\lambda) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad U(x) = T_0 + \frac{Q}{\alpha} + \frac{Q}{A\lambda}(\ell - x)$$

För att $u(x,t) = U(x) + v(x,t)$ ska uppfylla det ursprungliga problemet måste $v(x,t)$ uppfylla

$$\begin{array}{lll} \text{PDE} & v_{xx} - \frac{1}{a}v_t = 0 & 0 \le x \le \ell \\ \text{RV} & v_x(0,t) = 0 & \\ & v_x(\ell,t) + \frac{\alpha}{A\lambda}v(\ell,t) = 0 & \\ \text{BV} & v(x,0) = -U(x) & \end{array}$$

Ansätt $v(x,t) = f(x)g(t)$. Detta ger

$$\begin{aligned} f''(x) + k^2 f(x) &= 0 \\ f'(0) &= 0 \\ f'(\ell) + \frac{\alpha}{A\lambda}f(\ell) &= 0 \end{aligned}$$

Den första ekvationen och RV $f'(0) = 0$ ger $f(x) = \cos kx$. Det andra randvillkoret ger

$$\tan k\ell = \frac{\alpha}{kA\lambda}$$

Egenvärdena $k_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ ges av denna ekvation.

Vi finner också att

$$g_n(t) = B_n e^{-ak_n^2 t}$$

Superponera.

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(k_n x) e^{-ak_n^2 t}$$

Anpassa till BV:

$$\begin{aligned}
v(x,0) &= -U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(k_n x) \\
\Rightarrow \quad B_n &= \frac{(f_n, -U)}{\|f_n\|^2} \\
\|f_n\|^2 &= \int_0^\ell \cos^2 k_n x \, dx = \frac{\ell}{2} + \frac{\sin(2k_n\ell)}{4k_n} \\
(f_n, -U) &= -\int_0^\ell \cos(k_n x) U(x) dx = -\left( T_0 \frac{\sin(k_n\ell)}{k_n} + \frac{Q}{A\lambda k_n^2} \right)
\end{aligned}$$

Således

$$u(x,t) = T_0 + \frac{Q}{\alpha} + \frac{Q}{A\lambda}(\ell - x) - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\left(T_0 \frac{\sin(k_n\ell)}{k_n} + \frac{Q}{A\lambda k_n^2}\right)}{\left(\frac{\ell}{2} + \frac{\sin(2k_n\ell)}{4k_n}\right)} \right) \cos(k_n x) e^{-ak_n^2 t}$$

där $k_n$ är lösningarna till

$$\tan(k\ell) = \frac{\alpha}{kA\lambda}$$

## Påtvingade svängningar

3.20. Problemet lyder

$$\begin{array}{lll}
\text{PDE} & u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0 & 0 \le x \le \ell \\
\text{RV} & m u_{tt}(0,t) = S u_x(0,t) - k u(0,t) & \\
 & u(\ell, t) = a \cos \omega t &
\end{array}$$

Ansätt $u(x,t) = f(x) \cos \omega t$. Detta ger

$$f''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) = 0$$

$$\text{RV:} \begin{cases} -m\omega^2 f(0) = S f'(0) - k f(0) \\ f(\ell) = a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = A \sin\left(\frac{\omega}{c} x\right) + B \cos\left(\frac{\omega}{c} x\right)$$

med

$$\begin{aligned} A &= \frac{a}{\left(\sin(\omega\ell/c) + \frac{S\omega}{c(k-m\omega^2)}\cos(\omega\ell/c)\right)} \\ B &= \frac{a}{\left(\cos(\omega\ell/c) + \frac{c(k-m\omega^2)}{S\omega}\sin(\omega\ell/c)\right)} \end{aligned}$$

Till den så bestämda lösningen $u = f(x)\cos\omega t$ skulle vi kunna addera en godtycklig lösning $u_1(x,t)$ som uppfyller ekvationen och det ursprungliga RV för $x = 0$ och dessutom $u_1(\ell,t) = 0$. Vi antar att $u_1$ dämpas ut med tiden.

3.21. Problemet lyder

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = -\frac{a}{S}x(\ell - x)\cos\omega t \quad 0 \le x \le \ell \\ \text{RV} & u(0,t) = 0 \\ & u(\ell,t) = 0 \end{array}$$

Ansätt $u(x,t) = f(x)\cos\omega t$. Detta ger

$$f''(x) + \frac{\omega^2}{c^2}f(x) = -\frac{a}{S}x(\ell - x)$$

$$\text{RV:}\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(\ell) = 0 \end{cases}$$

Den homogena lösningen är

$$f_h(x) = A\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + B\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right)$$

Ansätt en partikulärlösning $f_p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$. Man finner att

$$f_p(x) = \frac{ac^2}{S\omega^2}\left(x^2 - \ell x - 2\left(\frac{c}{\omega}\right)^2\right)$$

RV ger

$$f(0) = B - \frac{2ac^4}{S\omega^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{2ac^4}{S\omega^4}$$

$$f(\ell) = A\sin\left(\frac{\omega}{c}\ell\right) + B\cos\left(\frac{\omega}{c}\ell\right) - \frac{2ac^4}{S\omega^4} = 0$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{2ac^4}{S\omega^4}\frac{(1 - \cos(\omega\ell/c))}{\sin(\omega\ell/c)}$$

Således

$$u(x,t) = \frac{2ac^4}{S\omega^4}\left(\frac{\omega^2}{2c^2}x(x-\ell) - 1 + \frac{(1 - \cos(\omega\ell/c))}{\sin(\omega\ell/c)}\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right)\right)$$

## Laplaces ekvation för en rektangel

3.22. Problemet lyder

$$\begin{array}{lll} \text{PDE} & u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 \le x \le \ell \\ \text{RV} & u_x(0, y) = 0 & \\ & u_x(\ell, y) = 0 & \\ & u(x, 0) = 0 & \\ & u(x, \ell) = \alpha(x) = T_0 \ell \, \delta(x - \ell/2) & \end{array}$$

Vi behandlar $y$-beroendet på samma sätt som vi behandlar $t$-beroendet när vi löser vågekvationen.

Ansätt $u(x, y) = f(x)g(y)$. Detta ger

$$\frac{f''}{f} = -\frac{g''}{g} = -k^2$$

$$\begin{aligned} g''(y) - k^2 g(y) &= 0 \\ f''(x) + k^2 f(x) &= 0 \\ f'(0) &= 0 \\ f'(\ell) &= 0 \end{aligned}$$

som har lösningarna

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \cos(k_n x), \quad k_n = \frac{n\pi}{\ell}, \quad n = 0, 1, 2 \ldots \\ g_n(y) &= A_n \cosh(k_n y) + B_n \sinh(k_n y) \\ g_0(y) &= A_0 + B_0 y \end{aligned}$$

Superponera

$$u(x, y) = A_0 + B_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cosh(k_n y) + B_n \sinh(k_n y)) \cos(k_n x)$$

Anpassa till RV.

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0 = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(k_n x) \quad \Rightarrow \quad A_n = 0 \\ u(x, \ell) &= \alpha(x) = B_0 \ell + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh(k_n \ell) \cos(k_n x) \\ B_0 &= \frac{(f_0, \alpha)}{\ell \|f_0\|^2} = \frac{1}{\ell^2} \int_0^{\ell} T_0 \ell \, \delta(x - \ell/2) dx = \frac{T_0}{\ell} \\ B_n &= \frac{(f_n, \alpha)}{\sinh(k_n \ell) \|f_n\|^2} = \frac{2}{\ell \sinh(k_n \ell)} \int_0^{\ell} \cos(k_n x) T_0 \ell \, \delta(x - \ell/2) dx \\ &= \frac{2T_0 \cos(n\pi/2)}{\sinh(n\pi)} \end{aligned}$$

Således

$$u(x,y) = T_0 \left( \frac{y}{\ell} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sinh(2n\pi)} \cos\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right) \sinh\left(\frac{2n\pi y}{\ell}\right) \right)$$

3.23. Vi ska lösa ekvationen

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{S}{\mu}, \quad 0 \le x \le \ell \\ \text{RV} & v(x,0) = 0 \\ & v(x,b) = 0 \\ & v(0,y) = 0 \\ & v(b,y) = 0 \end{array}$$

Vi har en inhomogen ekvation och ansätter därför en lösning på formen

$$v(x,y) = U(x) + w(x,y)$$

och låter $U(x)$ ta hand om inhomogeniteten. Låt

$$\begin{aligned} U''(x) &= -\frac{S}{\mu} \\ U(0) &= 0 \\ U(b) &= 0 \end{aligned}$$

Detta problem har lösningen

$$U(x) = \frac{S}{2\mu} x(b-x).$$

Detta leder till följande problem för $w(x,y)$,

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 \le x \le \ell \\ \text{RV} & w(x,0) = \frac{S}{2\mu} x(x-b) \\ & w(x,b) = \frac{S}{2\mu} x(x-b) \\ & w(0,y) = 0 \\ & w(b,y) = 0 \end{array}$$

Vi ansätter $w(x,y) = f(x)g(y)$ och variabelseparerar. Detta ger

$$\begin{cases} f''(x) + k^2 f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f(b) = 0 \end{cases}$$

vilket har lösningen

$$f_n(x) = \sin(k_n x), \qquad k_n = \frac{n\pi}{b}, \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

För $g_n(y)$ får vi problemet

$$g_n''(y) - k_n^2 g_n(y) = 0,$$

med lösningen

$$g_n(y) = A_n \sinh(k_n y) + B_n \cosh(k_n y).$$

Superponera lösningarna

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x)(A_n \sinh(k_n y) + B_n \cosh(k_n y))$$

Randvillkoren ger oss

$$\begin{aligned} w(x,0) &= \frac{S}{2\mu} x(x-b) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(k_n x) \\ w(x,b) &= \frac{S}{2\mu} x(x-b) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x)(A_n \sinh(k_n b) + B_n \cosh(k_n b)) \end{aligned}$$

Två fourierserier med basfunktionerna $\sin(k_n x)$. Koefficienterna ges av

$$\begin{aligned} B_n = A_n \sinh(k_n b) + B_n \cosh(k_n b) &= \frac{2}{b} \int_0^b \frac{S}{2\mu} x(x-b) \sin(k_n x)\, dx \\ &= \begin{cases} 0 & n \text{ jämnt} \\ -\frac{4S}{\mu b k_n^3} & n \text{ udda} \end{cases} \end{aligned}$$

Sammanfattningsvis blir lösningen

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \frac{S}{2\mu} x(b-x) \\ &\quad - \frac{4Sb^2}{\mu\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \sin(k_{2n+1} x) \\ &\quad \times \left( \frac{1-\cosh((2n+1)\pi)}{\sinh((2n+1)\pi)} \sinh(k_{2n+1} y) + \cosh(k_{2n+1} y) \right). \end{aligned}$$

Vätskeflödet är

$$\Phi = \int_0^b \int_0^b v(x,y) dx\, dy = \frac{Sb^4}{\mu} \left( \frac{1}{12} - \frac{16}{\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\cosh((2n+1)\pi) - 1)}{(2n+1)^5 \sinh((2n+1)\pi)} \right)$$

## Produktmetoden, tidsberoende inhomogeniteter

3.24. Problemet lyder

$$\begin{array}{lll} \text{PDE} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{I_0^2 e^{-\alpha t}}{A^2 \sigma \lambda} & 0 \le x \le \ell \\ \text{RV} & u(0,t) = 0 & \\ & u(\ell,t) = 0 & \\ \text{BV} & u(x,0) = T_0 & \end{array}$$

Utveckla $u$ i egenfunktioner till problemet

$$\begin{cases} f''(x) + k^2 f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f(\ell) = 0 \end{cases}$$

Dessa är

$$f_n(x) = \sin(k_n x), \qquad k_n = \frac{n\pi}{\ell}$$

Utveckla

$$-\frac{I_0^2 e^{-\alpha t}}{A^2 \sigma \lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin(k_n x)$$

$$c_n(t) = -\frac{2 I_0^2 e^{-\alpha t}}{\ell A^2 \sigma \lambda} \int_0^{\ell} \sin(k_n x) dx = \begin{cases} 0 & n \text{ jämnt} \\ -\frac{4 I_0^2}{A^2 \lambda \sigma n \pi} e^{-\alpha t} & n \text{ udda} \end{cases}$$

Ansätt

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin(k_n x)$$

Insatt i ekvationen för $u$ ger detta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( -k_n^2 g_n(t) - \frac{1}{a} g_n'(t) \right) \sin(k_n x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin(k_n x)$$

När $n$ är jämnt blir

$$g_n(t) = B_n e^{-a k_n^2 t}$$

När $n$ är udda blir

$$g_n(t) = B_n e^{-a k_n^2 t} + \frac{4 I_0^2 a e^{-\alpha t}}{A^2 \lambda \sigma n \pi (a k_n^2 - \alpha)}$$

Således är

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ jämnt}}}^{\infty} B_n \sin(k_n x) e^{-a k_n^2 t} \\ &\quad + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ udda}}}^{\infty} \left( B_n e^{-a k_n^2 t} + \frac{4 I_0^2 a e^{-\alpha t}}{A^2 \lambda \sigma n \pi (a k_n^2 - \alpha)} \right) \sin(k_n x) \end{aligned}$$

Anpassa till BV.

$$\begin{aligned} u(x,0) &= T_0 = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ jämnt}}}^{\infty} B_n \sin(k_n x) \\ &\quad + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ udda}}}^{\infty} \left( B_n + \frac{4 I_0^2 a}{A^2 \lambda \sigma n \pi (a k_n^2 - \alpha)} \right) \sin(k_n x) \end{aligned}$$

För jämna $n$ blir

$$B_n = \frac{2T_0}{\ell}\int_0^\ell \sin(k_n x)dx = 0$$

För udda $n$ blir

$$B_n + \frac{4I_0^2 a}{A^2\lambda\sigma n\pi(ak_n^2-\alpha)} = \frac{2T_0}{\ell}\int_0^\ell \sin(k_n x)dx = \frac{4T_0}{n\pi}$$

Således

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(k_{2n+1}x)\cdot$$
$$\left(\frac{4T_0}{(2n+1)\pi}e^{-ak_{2n+1}^2 t} + \frac{4I_0^2 a}{A^2\lambda\sigma(2n+1)\pi(ak_{2n+1}^2-\alpha)}\left(e^{-\alpha t}-e^{-ak_{2n+1}^2 t}\right)\right)$$

3.25. Problemet lyder

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{Q}{\lambda}e^{-\alpha t}\sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) \quad 0 \le x \le \ell \\ \text{RV} & u_x(0,t) = 0 \\ & u_x(\ell,t) = 0 \\ \text{BV} & u(x,0) = 0 \end{array}$$

Utveckla $u$ i egenfunktioner till problemet

$$\begin{cases} f''(x) + k^2 f(x) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f'(\ell) = 0 \end{cases}$$

Dessa är

$$f_n(x) = \cos(k_n x), \qquad k_n = \frac{n\pi}{\ell}, \qquad n = 0,1,2\ldots$$

$$\begin{aligned} -\frac{Q}{\lambda}e^{-\alpha t}\sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)\cos(k_n x) \\ c_0(t) &= -\frac{Q}{\lambda\ell}e^{-\alpha t}\int_0^\ell \sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right)dx = -\frac{2Q}{\lambda\pi}e^{-\alpha t} \\ c_n(t) &= -\frac{2Q}{\lambda\ell}e^{-\alpha t}\int_0^\ell \sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx = \begin{cases} \frac{4Q}{\lambda\pi(n^2-1)}e^{-\alpha t} & n \text{ jämnt} \\ 0 & n \text{ udda} \end{cases} \end{aligned}$$

Definiera $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_{2n} = 2$ för $n > 0$.

Ansätt

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t)\cos(k_n x)$$

Insatt i ekvationen för $u$ ger detta

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-k_n^2 g_n(t) - \frac{1}{a}g_n'(t)\right)\cos(k_n x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\epsilon_{2n}Q}{\lambda\pi(4n^2-1)}e^{-\alpha t}\cos(k_{2n}x)$$

Vi finner att

$$g_{2n+1} = A_{2n+1}e^{-ak_{2n+1}^2 t}$$

och

$$g_{2n}(t) = A_{2n}e^{-ak_{2n}^2 t} - \frac{2\epsilon_{2n}Qa}{\lambda\pi(4n^2-1)(ak_{2n}^2-\alpha)}e^{-\alpha t}$$

Således

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_{2n}e^{-ak_{2n}^2 t} - \frac{2\epsilon_{2n}Qa}{\lambda\pi(4n^2-1)(ak_{2n}^2-\alpha)}e^{-\alpha t}\right)\cos(k_{2n}x) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty}A_{2n+1}\cos(k_{2n+1}x)e^{-ak_{2n+1}^2 t} \end{aligned}$$

Anpassa till BV.

$$u(x,0) = 0 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_{2n} - \frac{2\epsilon_{2n}Qa}{\lambda\pi(4n^2-1)(ak_{2n}^2-\alpha)}\right)\cos(k_{2n}x) + \sum_{n=0}^{\infty}A_{2n+1}\cos(k_{2n+1}x)$$

$$\Rightarrow \quad A_{2n} = \frac{2\epsilon_{2n}Qa}{\lambda\pi(4n^2-1)(ak_{2n}^2-\alpha)}, \qquad A_{2n+1} = 0$$

Således

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\epsilon_{2n}Qa}{\lambda\pi(4n^2-1)(ak_{2n}^2-\alpha)}\left(e^{-ak_{2n}^2 t} - e^{-\alpha t}\right)\cos(k_{2n}x)$$

3.26. a) Låt $x$ vara djupet under jordytan. Problemet blir:

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & u_x x - \frac{1}{a}u_t = 0 \quad 0 \le x < \infty \\ \text{RV} & u(0,t) = f(t) \\ & u(x,t) \text{ändlig} \end{array}$$

Fourierutveckla den periodiska funktionen $f(t)$.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n\sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)\right)$$

Sök först lösningarna till ekvationen med RV: $u(0,t) = \cos\omega t$ resp. $\sin\omega t$. Ansätt $u(x,t) = \varphi(x)e^{i\omega t}$. Detta ger

$$\varphi''(x) - \frac{i\omega}{a}\varphi(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x) = Ae^{\pm x\sqrt{i\omega/a}} = A\exp(\pm x\sqrt{\omega/a}(1+i)/\sqrt{2}) = Ae^{\pm px}e^{\pm ipx}$$

där $p = \sqrt{\omega/(2a)}$.

Plustecknet stryks ty annars växer lösningen obegränsat då $x \to \infty$. Genom superposition får vi lösningarna $Ae^{-px}\cos(\omega t - px)$ resp. $Ae^{-px}\sin(\omega t - px)$. Den lösning som uppfyller det ursprungliga RV fås då som

$$u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-p_n x}\left(a_n \cos(\omega_n t - p_n x) + b_n \sin(\omega_n t - p_n x)\right)$$

med

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{T}, \quad p_n = \sqrt{\frac{\omega_n}{2a}} = \sqrt{\frac{n\pi}{aT}}$$

Vi kan addera en godtycklig lösning till ekvationen med homogent RV men den kommer att gå mot noll då $t \to \infty$.

b) Antag att $a_1$, $b_1$ dominerar över $a_k$, $b_k$ med större $k$.

$$u(x,t) \approx a_0 + e^{-p_1 x}\left(a_1 \cos(\omega_1 t - p_1 x) + b_1 \sin(\omega_1 t - p_1 x)\right)$$

Fasförskjutningen $p_1 x = \pi \Rightarrow x = \pi\sqrt{aT/\pi} \approx 4{,}5$ m.

c)

$$f(t) \approx 7 + 10\cos\omega_1 t$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) \approx 7 + 10e^{-p_1 x}\cos(\omega_1 t - p_1 x)$$

Det kallaste det blir på djupet $x$ är $7 - 10e^{-p_1 x}$. Detta blir positivt för $x > 0{,}5$ m.

# 5 Användning av produktmetoden och totala ortogonalföljder

## Helmholtz ekvation i kartesiska koordinater

5.1. a) Problemet lyder

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, \quad 0 \le x, y \le a \\ \text{RV} & u(x,0) = 0 \\ & u(x,a) = 0 \\ & u(0,y) = 0 \\ & u(a,y) = 0 \end{array}$$

Variabelseparationsmetoden ger egensvängningarna

$$\varphi_{n,m}(x,y) = \sin(k_n x)\sin(k_m y), \quad k_\ell = \frac{\ell\pi}{a}, \quad \ell = 1, 2\ldots$$

och egenfrekvenserna

$$\omega_{n,m} = \frac{\pi c}{a}\sqrt{n^2 + m^2}$$

b) Superponera

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2} - \varphi_{2,1} &= \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right) - \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{a}(x-2y)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{a}(x+2y)\right)\right. \\ &\qquad \left. - \cos\left(\frac{\pi}{a}(2x-y)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{a}(2x+y)\right)\right) \end{aligned}$$

När $x = y$ blir detta noll, dvs diagonalen är en nodlinje.

5.2. Vi ska lösa problemet

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \Delta u(x,y,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y,t) = 0, \quad 0 \le x, y \le \ell \\ \text{RV} & u(0,y,t) = 0 \\ & u(\ell,y,t) = 0 \\ & u(x,0,t) = 0 \\ & u(x,\ell,t) = 0 \\ \text{BV} & u(x,y,0) = 0 \\ & u_t(x,y,t) = -v_0 \end{array}$$

Variabelseparation med ansatsen $u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$ ger följande ekvationer och lösningar.

$$\begin{cases} X''(x) + k_x^2 X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(\ell) = 0 \end{cases}$$

med lösning

$$X_n(x) = \sin(k_n x), \qquad k_x = k_n = \frac{n\pi}{\ell}, \qquad n = 1,2,3\ldots$$

och

$$\begin{cases} Y''(y) + k_y^2 Y(y) = 0 \\ Y(0) = 0 \\ Y(\ell) = 0 \end{cases}$$

med lösning

$$Y_m(y) = \sin(k_m y), \qquad k_y = k_m = \frac{m\pi}{\ell}, \qquad m = 1,2,3\ldots$$

För $T_{nm}(t)$ får vi problemet

$$T''_{nm}(t) + c^2(k_n^2 + k_m^2)T_{nm}(t) = 0,$$

med lösningen

$$T_{nm}(t) = A_{nm}\sin(\omega_{nm}t) + B_{nm}\cos(\omega_{nm}t), \qquad \omega_{nm} = c\sqrt{k_n^2 + k_m^2}.$$

Superponera lösningarna

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(A_{nm}\sin(\omega_{nm}t) + B_{nm}\cos(\omega_{nm}t))\sin(k_n x)\sin(k_m y)$$

Anpassa till begynnelsevillkoren.

$$u(x,y,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B_{nm}\sin(k_n x)\sin(k_m y) = 0$$

vilket ger $B_{nm} = 0$ för alla $n$ och $m$.

$$u_t(x,y,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\omega_{nm}\sin(k_n x)\sin(k_m y) = -v_0$$

$A_{nm}$ erhålles ur

$$A_{nm} = \frac{-v_0\displaystyle\int_0^\ell\int_0^\ell \sin\frac{n\pi x}{\ell}\sin\frac{m\pi y}{\ell}\,dx\,dy}{\omega_{nm}\displaystyle\int_0^\ell\int_0^\ell \sin^2\frac{n\pi x}{\ell}\sin^2\frac{m\pi y}{\ell}\,dx\,dy} = \begin{cases} \frac{-16v_0}{\pi^2 nm\omega_{nm}} & n \text{ och } m \text{ udda} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Den slutliga lösningen blir

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= -\frac{16v_0}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2m-1)\omega_{2n-1,2m-1}} \\ &\quad \times \sin(k_{2n-1}x)\sin(k_{2m-1}y)\sin(\omega_{2n-1,2m-1}t) \end{aligned}$$

## Laplaces ekvation i polära koordinater

5.3. Ekvationen blir

$$\Delta T = -\frac{h}{\lambda} = -\frac{\sigma E^2}{\lambda} = -\frac{(a-bT)V^2}{\lambda\ell^2}$$

vilket vi skriver om till

$$\Delta T - \frac{bV^2}{\lambda\ell^2}T = -\frac{aV^2}{\lambda\ell^2}$$

med RV $T(R) = T_0$. Pga rotationssymmetri beror $T$ bara av $r$.
Ansätt $T(r) = u(r) + a/b$. $u(r)$ uppfyller då

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{bV^2}{\lambda\ell^2}u = 0$$

med RV

$$u(R) = T_0 - \frac{a}{b}$$

Lösningen är

$$u(r) = AI_0(kr) + BK_0(kr), \quad k = \sqrt{\frac{bV^2}{\lambda\ell^2}}$$

$K_0$ är singulär i origo. $\Rightarrow B = 0$.
RV vid $r = R$ ger nu

$$A = \frac{T_0 - a/b}{I_0(kR)}$$

Således

$$T(r) = \left(T_0 - \frac{a}{b}\right)\frac{I_0(kr)}{I_0(kR)} + \frac{a}{b}$$

5.4. Problemet lyder

$$\begin{array}{lll} \text{PDE} & \Delta\Phi = 0 & R \le r < \infty, \quad 0 \le \phi \le 2\pi \\ \text{RV} & \Phi = -v_0 r\cos\varphi & r \to \infty \\ & \frac{\partial\Phi}{\partial r} = 0 & r = R \end{array}$$

Egentligen borde vi också ange villkoret $\Phi(r,\varphi) = \Phi(r,\varphi+2\pi)$, men det är så självklart att man ofta utelämnar det. RV för $r \to \infty$ gör att vi ansätter $\Phi(r,\varphi) = f(r)\cos\varphi$. Detta ger

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) - \frac{1}{r^2}f(r) = 0$$

$$\text{RV:} \begin{cases} f(r) = -v_0 r & r \to \infty \\ f'(R) = 0 \end{cases}$$

Ansätt $f(r) = r^s$. Det ger

$$s(s-1)r^{s-2} + sr^{s-2} - r^{s-2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad s(s-1) + s - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \pm 1$$

Således

$$f(r) = \frac{A}{r} + Br$$

RV vid $r \to \infty$ ger $B = -v_0$. $f'(R) = 0$ ger sedan $A = -R^2 v_0$. dvs

$$\Phi(r, \varphi) = -v_0 \left( \frac{R^2}{r} + r \right) \cos\varphi$$

Hastighetsfältet blir

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -\nabla\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}\mathbf{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi \\ &= v_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cos\varphi \mathbf{e}_r - v_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin\varphi \mathbf{e}_\varphi \\ |\mathbf{v}| &= v_0 \sqrt{1 + \frac{R^4}{r^4} - 2\frac{R^2}{r^2}\cos 2\varphi} \end{aligned}$$

$|\mathbf{v}|$ antar max för $\varphi = \pi/2$ och $r = R$. $|\mathbf{v}|_{\max} = 2v_0$.

5.5. Vi ska lösa systemet

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \Delta V(r,z) = 0, \quad 0 \le r \le a, \quad 0 \le z \le \ell \\ \text{RV} & V(a,z) = V_0 \\ & V(r,0) = 0 \\ & V(r,\ell) = 0 \end{array}$$

Vi ansätter $V(r,z) = f(r)g(z)$ och variabelseparerar. Detta ger

$$\begin{cases} g''(z) + k^2 g(z) = 0 \\ g(0) = 0 \\ g(\ell) = 0 \end{cases}$$

vilket har lösningen

$$g_n(z) = \sin(k_n z), \qquad k_n = \frac{n\pi}{\ell}, \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

För $f_n(r)$ får vi problemet

$$r^2 f_n''(r) + r f_n'(r) - k_n^2 r^2 f_n(r) = 0,$$

som har lösningen

$$f_n(r) = A_n I_0(k_n r) + B_n K_0(k_n r).$$

$K_0$ är singulär i origo $\Rightarrow$ $B_n = 0$. Superponera:

$$V(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_0(k_n r) \sin(k_n z).$$

Randvillkoret

$$V(a,z) = V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_0(k_n a) \sin(k_n z)$$

ger att

$$A_n = \frac{2V_0}{\ell I_0(k_n a)} \int_0^{\ell} \sin(k_n x)\, dx = \begin{cases} 0 & n \text{ jämnt} \\ \frac{4V_0}{n\pi I_0(k_n a)} & n \text{ udda} \end{cases}$$

Sammanfattningsvis blir lösningen

$$V(r,z) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \frac{I_0(k_{2n+1} r)}{I_0(k_{2n+1} a)} \sin(k_{2n+1} z).$$

5.6. Problemet lyder

$$\begin{array}{lll} \text{PDE} & \Delta u = 0, & 0 \le r \le R, \quad 0 \le z \le \ell \\ \text{RV} & u(r,0) = 0 & \\ & u(r,\ell) = 0 & \\ & u(R,z) = T_0 \sin^2 \frac{\pi z}{\ell} & \end{array}$$

Ansätt $u(r,z) = f(r)g(z)$ och variabelseparera.

$$\begin{cases} g''(z) + k^2 g(z) = 0 \\ g'(0) = 0 \\ g'(\ell) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad g_n(z) = \cos k_n z, \quad k_n = \frac{n\pi}{\ell} \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

$$r^2 f_n''(r) + r f_n'(r) - k_n^2 r^2 f_n(r) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f_0(r) = A_0 + B_0 \ln r$$

$$f_n(r) = A_n I_0(k_n r) + B_n K_0(k_n r)$$

$K_0$ och $\ln r$ är singulära i origo $\Rightarrow B_n = 0$.

Superponera.

$$u(r,z) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_0(k_n r)\cos(k_n z)$$

Anpassa till RV vid $r = R$.

$$u(R,z) = T_0\left(\frac{1-\cos(2\pi z/\ell)}{2}\right) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_0(k_n R)\cos\left(\frac{n\pi z}{\ell}\right)$$

Identifiering ger

$$A_0 = \frac{T_0}{2}, \quad A_2 = -\frac{T_0}{2I_0(k_2 R)}$$

och övriga $A_n = 0$. Således

$$u(r,z) = \frac{T_0}{2}\left(1 - \frac{I_0(2\pi r/\ell)}{I_0(2\pi R/\ell)}\cos\left(\frac{2\pi z}{\ell}\right)\right)$$

Maximala temperaturen på ändytorna, $z = 0$ och $z = \ell$ fås för $r = 0$.

$$u(0,\ell) = \frac{T_0}{2}\left(1 - \frac{1}{I_0(2\pi R/\ell)}\right)$$

5.7. Problemet lyder

$$\begin{array}{lll}
\text{PDE} & \Delta u = 0, & 0 \le r \le R, \quad 0 \le z \le 2\ell \\
\text{RV} & u(r,0) = 0 & \\
 & u(r,2\ell) = V_0 & \\
 & u(R,z) = \begin{cases} 0 & 0 \le z \le \ell \\ V_0 & \ell \le z \le 2\ell \end{cases} &
\end{array}$$

Ansätt $u(r,z) = U(z) + v(r,z)$. Välj $U(z)$ så att $v(r,z)$ får homogena RV i $z$-led. Låt $U(z)$ uppfylla

$$\begin{cases} \Delta U = U''(z) = 0 \\ U(0) = 0 \\ U(2\ell) = V_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad U(z) = \frac{V_0 z}{2\ell}$$

$v(r,z)$ uppfyller nu

$$\Delta v = 0$$

$$\text{RV:} \begin{cases} v(r,0) = 0 \\ v(r,2\ell) = 0 \\ v(R,z) = \alpha(z) = \begin{cases} -V_0 z/(2\ell) & 0 \le z \le \ell \\ V_0 - V_0 z/(2\ell) & \ell \le z \le 2\ell \end{cases} \end{cases}$$

Ansätt $v(r,z) = f(r)g(z)$ och variabelseparera.

$$\begin{cases} g''(z) + k^2 g(z) = 0 \\ g(0) = 0 \\ g(2\ell) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad g_n(z) = \sin k_n z, \quad k_n = \frac{n\pi}{2\ell}, \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$r^2 f_n''(r) + r f_n'(r) - k_n^2 r^2 f_n(r) = 0$$
$$\Rightarrow \quad f_n(r) = A_n I_0(k_n r) + B_n K_0(k_n r)$$

$K_0$ är singulär i origo $\Rightarrow B_n = 0$.

Superponera.

$$v(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_0(k_n r) \sin(k_n z)$$

Anpassa till RV.

$$v(R,z) = \alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_0(k_n R) \sin\left(\frac{n\pi z}{\ell}\right)$$

$$\Rightarrow \quad A_n = \frac{(g_n, \alpha)}{I_0(k_n R)\|g_n\|^2} = \frac{1}{I_0(k_n R)\ell} \int_0^{2\ell} \alpha(z) \sin(k_n z) dz = \frac{2V_0}{n\pi I_0(k_n R)} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Således

$$u(r,z) = \frac{V_0 z}{2\ell} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_0(-1)^n}{n\pi I_0(k_{2n} R)} I_0(k_{2n} r) \sin(k_{2n} z)$$

5.8. Problemet lyder

$$\begin{array}{lll} \text{PDE} & \Delta u = 0, & R_1 \le r \le R_2, \quad 0 \le z \le h \\ \text{RV} & u(R_1, z) = T_0 e^{-\mu z} & \\ & u(R_2, z) = 0 & \\ & u(r, 0) = 0 & \\ & u(r, h) = 0 & \end{array}$$

Ansätt $u(r,z) = f(r)g(z)$. Detta ger

$$\begin{cases} g''(z) + k^2 g(z) = 0 \\ g'(0) = 0 \\ g(h) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad g_n(z) = \cos(k_n z), \quad k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2h}$$

$$r^2 f_n''(r) + r f_n'(r) - r^2 k_n^2 f_n(r) = 0$$
$$\Rightarrow \quad f_n(r) = A_n I_0(k_n r) + B_n K_0(k_n r)$$

Superponera.

$$u(r,z) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n I_0(k_n r) + B_n K_0(k_n r)) \cos(k_n z)$$

Anpassa till RV.

$$
\begin{aligned}
u(R_2,z) &= 0 = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n I_0(k_nR_2) + B_n K_0(k_nR_2))\cos(k_n z) \\
\Rightarrow \quad B_n &= -A_n \frac{I_0(k_nR_2)}{K_0(k_nR_2)} \\
u(R_1,z) &= T_0 e^{-\mu z} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left( I_0(k_nR_1) - I_0(k_nR_2)\frac{K_0(k_nR_1)}{K_0(k_nR_2)} \right)\cos(k_n z) \\
\Rightarrow \quad A_n &= \frac{2}{h}\frac{K_0(k_nR_2)}{(I_0(k_nR_1)K_0(k_nR_2) - I_0(k_nR_2)K_0(k_nR_1))}\int_0^h T_0 e^{-\mu z}\cos(k_n z)dz \\
&= \frac{2T_0(k_n e^{-\mu h}(-1)^n + \mu)K_0(k_nR_2)}{h(k_n^2+\mu^2)(I_0(k_nR_1)K_0(k_nR_2) - I_0(k_nR_2)K_0(k_nR_1))}
\end{aligned}
$$

Således

$$
\begin{aligned}
u(r,z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2T_0(k_n e^{-\mu h}(-1)^n + \mu)}{h(k_n^2+\mu^2)(I_0(k_nR_1)K_0(k_nR_2) - I_0(k_nR_2)K_0(k_nR_1))} \times \\
&\quad (K_0(k_nR_2)I_0(k_nr) - I_0(k_nR_2)K_0(k_nr))\cos(k_n z)
\end{aligned}
$$

## Våg- och diffusionsekvationen i polära koordinater

5.9. Problemet lyder

$$
\begin{array}{ll}
\text{PDE} & \Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad c^2 = \frac{S\pi R^2}{m} = \frac{S}{\rho} \quad 0 \le r \le R, \quad 0 \le \phi \le 2\pi \\
\text{RV} & u(R,\phi,t) = 0 \\
 & u(r,\phi,t)\text{ändlig}
\end{array}
$$

Ansätt $u(\mathbf{r},t) = f(\mathbf{r})g(t)$ och variabelseparera.

$$g''(t) + c^2k^2g(t) = 0$$

$$\Delta f(\mathbf{r}) + k^2 f(\mathbf{r}) = 0$$

$$\text{RV: } f(R,\varphi) = 0$$

Variabelseparera igen. Ansätt $f(r,\varphi) = h(r)\Phi(\varphi)$.

$$r^2\frac{h''}{h} + r\frac{h'}{h} + k^2r^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} = m^2$$

$$\Rightarrow \quad \Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_m(\varphi) = A_m\cos m\varphi + B_m \sin m\varphi$$

$$r^2h''(r) + rh'(r) + (k^2r^2 - m^2)h(r) = 0$$

$$\text{RV: } h(R) = 0$$

$$\Rightarrow \quad h(r) = CJ_m(kr) + DY_m(kr)$$

$Y_m$ är singulär i origo $\Rightarrow D = 0$.

$$h(R) = 0 \quad \Rightarrow \quad J_m(kR) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{ms} = \frac{j_{ms}}{R}$$

Egensvängningarna blir (välj cos för $t$-beroendet)

$$u_{ms}(r, \varphi, t) = J_m\left(\frac{j_{ms}}{R}r\right) \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix} \cos(ck_{ms}t)$$

Egenfrekvenserna är

$$\omega_{ms} = ck_{ms} = \frac{cj_{ms}}{R}$$

Lägsta frekvensen fås för $m = 0$, $s = 1$. Amplituden ska vara $A$ enligt uppgiften.

$$u(r,t) = AJ_0\left(\frac{j_{01}}{R}r\right) \cos\left(c\frac{j_{01}}{R}t\right)$$

Kinetiska energin blir

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\int_0^R \rho u_t^2 2\pi r\,dr = \frac{A^2\rho c^2 j_{01}^2\pi}{R^2}\sin^2\left(c\frac{j_{01}}{R}t\right)\int_0^R J_0^2\left(\frac{j_{01}}{R}r\right) r\,dr \\ &= \frac{A^2 S j_{01}^2 \pi}{R^2}\sin^2\left(c\frac{j_{01}}{R}t\right)\frac{R^2}{2}J_1^2(j_{01}) \\ &= \frac{A^2 S j_{01}^2 J_1^2(j_{01})\pi}{2}\sin^2\left(c\frac{j_{01}}{R}t\right) = 2{,}45A^2 S\sin^2\left(c\frac{j_{01}}{R}t\right) \end{aligned}$$

5.10. Vi skall lösa problemet (cylinderkoordinater, endast beroende av $r$)

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \Delta u(r,t) - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}(r,t) = 0, \quad 0 \le r \le b \\ \text{RV} & u(b,t) = T_2 \quad (= 100°\text{C}) \\ & u(r,t)\text{ändlig} \\ \text{BV} & u(r,0) = T_1 \end{array}$$

Använd ansatsen $u(r,t) = v(r,t) + T_2$ och problemet i $v(r,t)$ blir

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \Delta v(r,t) - \frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial t}(r,t) = 0, \quad 0 \le r \le b \\ \text{RV} & v(b,t) = 0 \\ & v(r,t)\text{ändlig} \\ \text{BV} & v(r,0) = T_1 - t_2 \end{array}$$

Ansatsen $v(r,t) = R(r)g(t)$ och variabelseparation ger

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) + k^2r^2R(r) = 0 \\ R(b) = 0 \\ R(0) < \infty \end{cases}$$

vilket har lösningen

$$R_n(r) = J_0(k_n r), \qquad k_n = \frac{j_{0n}}{b}, \qquad n = 1, 2, 3 \dots$$

där $j_{0n}$ är nollställen till besselfunktionen $J_0(x)$. För $g_n(t)$ får vi problemet

$$g_n'(t) + a k_n^2 g_n(t) = 0,$$

med lösningen

$$g_n(t) = A_n e^{-a k_n^2 t}.$$

Superponera lösningarna

$$v(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(k_n r) e^{-a k_n^2 t}.$$

Begynnelsevillkoret ger oss

$$v(r,0) = T_1 - T_2 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(k_n r)$$

efter multiplikation med $J_0(k_m r)r$ och integration över $r$ från 0 till $b$ fås koefficienterna

$$A_n = \frac{(T_1 - T_2)\displaystyle\int_0^b J_0(k_n r) r\, dr}{\displaystyle\int_0^b (J_0(k_n r))^2 r\, dr} = \frac{\dfrac{T_1 - T_2}{k_n^2}\displaystyle\int_0^{j_{0n}} \frac{d}{dx}(x J_1(x))\, dx}{\dfrac{b^2}{2}(J_1(j_{0n}))^2} = \frac{2(T_1 - T_2)}{j_{0n} J_1(j_{0n})}$$

Sammanfattningsvis blir lösningen

$$u(r,t) = T_2 + 2(T_1 - T_2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(k_n r)}{j_{0n} J_1(j_{0n})} e^{-a k_n^2 t}.$$

Kokningen avbryts då $u(0,t) = T_0$ vilket med en term med i lösningen blir vid tidpunkten

$$t = \frac{b^2}{a j_{01}^2} \ln \frac{2(T_1 - T_2)}{(T_0 - T_2) j_{01} J_1(j_{01})}.$$

5.11. Utan skivan lyder problemet

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad c^2 = \frac{S}{\rho} \quad 0 \le r \le R \\ \text{RV} & u(R,t) = 0 \end{array}$$

Egenfrekvenserna är $\omega_{ms} = c j_{ms}/R$. (Se uppg. 5.9). Grundfrekvensen är $\omega_{01}$.

Med skivan lyder problemet

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad c^2 = \frac{S}{\rho} \quad R_0 \le r \le R \\ \text{RV} & u(R,t) = 0 \\ & u(R_0,t) = 0 \end{array}$$

Grundsvängningen är cirkulärsymmetrisk. Vi ansätter $u(r,t) = f(r)g(t)$ och variabelseparerar.

$$g''(t) + c^2k^2g(t) = 0$$

$$r^2f''(r) + rf'(r) + k^2r^2f(r) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(r) = AJ_0(kr) + BY_0(kr)$$

RV ger

$$\begin{aligned} AJ_0(kR) + BY_0(kR) &= 0 \\ AJ_0(kR_0) + BY_0(kR_0) &= 0 \end{aligned}$$

En icketrivial lösning finns endast om systemdeterminanten är noll.

$$J_0(kR)Y_0(kR_0) - J_0(kR_0)Y_0(kR) = 0$$

Kalla minsta lösningen $k_1$. Lägsta egenfrekvensen blir då $\omega_1 = ck_1$. Det sökta förhållandet blir

$$\frac{\omega_1}{\omega_{01}} = \frac{k_1R}{j_{01}}$$

Numeriska värden: för $R_0 = R/10$ blir $k_1 = 3{,}31/R$ och

$$\frac{\omega_1}{\omega_{01}} = \frac{3{,}31}{2{,}40} = 1{,}38$$

5.12. Problemet lyder

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \Delta u - \frac{1}{gh}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad 0 \le r \le R \quad 0 \le \phi \le \pi/2 \\ \text{RV} & u_r(R,\phi,t) = 0 \\ & u_\phi(r,0,t) = 0 \\ & u_\phi(r,\pi/2,t) = 0 \end{array}$$

Ansätt $u(\mathbf{r},t) = f(\mathbf{r})\Psi(t)$ och variabelseparera.

$$\Psi''(t) + ghk^2\Psi(t) = 0$$

$$\Delta f(\mathbf{r}) + k^2 f(\mathbf{r}) = 0$$

Separera igen. Ansätt $f(\mathbf{r},t) = F(r)\Phi(\varphi)$.

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0 \\ \Phi'(0) = 0 \\ \Phi'(\pi/2) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \Phi_m(\varphi) = \cos m\varphi, \quad m = 0, 2, 4, \ldots$$

$$\begin{cases} r^2F''(r) + rF'(r) + (k^2r^2 - m^2)F(r) = 0 \\ F'(R) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad F(r) = AJ_m(kr) + BY_m(kr)$$

$Y_m$ är singulär i origo $\Rightarrow B = 0$.

$$F'(R) = 0 \quad \Rightarrow \quad J_m'(kR) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{ms} = \frac{\eta_{ms}}{R}, \quad m = 0, 2, 4\ldots \; s = 1, 2, 3\ldots$$

Egensvängningarna blir (välj cos för tidsberoendet)

$$u_{ms}(r,\varphi,t) = J_m\left(\frac{\eta_{ms}}{R}r\right)\cos m\varphi \cos\left(\frac{\sqrt{gh}\,\eta_{ms}}{R}t\right)$$

Egenfrekvenser är

$$\omega_{ms} = \frac{\sqrt{gh}\,\eta_{ms}}{R}$$

Fallet $m = 0$, $s = 1$ ger $\omega_{01} = 0$ som ej är en svängning. De tre lägsta egenfrekvenserna är

$$\begin{aligned} \omega_{21} &= 3{,}05\sqrt{gh}/R \\ \omega_{02} &= 3{,}83\sqrt{gh}/R \\ \omega_{41} &= 5{,}32\sqrt{gh}/R \end{aligned}$$

5.13. Problemet lyder

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad c^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho} \quad 0 \le r \le R \\ \text{RV} & u(R,t) = 0 \end{array}$$

Ansätt $u(r,t) = f(r)g(t)$ och variabelseparera.

$$g''(t) + c^2k^2g(t) = 0$$

$$\begin{cases} r^2f''(r) + rf'(r) + (k^2r^2 - 1)f(r) = 0 \\ f(R) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(r) = AJ_1(kr) + BY_1(kr)$$

$Y_1$ är singulär i origo $\Rightarrow B = 0$.

$$f(R) = 0 \quad \Rightarrow \quad J_1(kR) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_s = \frac{j_{1s}}{R}$$

Egensvängningarna blir (välj cos för tidsberoendet)

$$u_s(r,t) = J_1\left(\frac{j_{1s}}{R}r\right)\cos\left(c\frac{j_{1s}}{R}t\right)$$

Egenfrekvenser är

$$\omega_s = c\frac{j_{1s}}{R} = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\frac{j_{1s}}{R}$$

Egensvängningen med en nodcirkel motsvarar $s = 2$. Nodcirkelns radie $r_0$ erhålls ur ekvationen

$$J_1(k_2 r_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_0 = \frac{j_{11}}{k_2} = \frac{Rj_{11}}{j_{12}} \approx 0{,}55R$$

5.14. Problemet lyder

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a}{S}u, \quad c^2 = \frac{S}{\rho} \quad 0 \le r \le R, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \\ \text{RV} & u(R,\varphi,t) = 0 \end{array}$$

Ansätt $u(\mathbf{r},t) = f(\mathbf{r})g(t)$ och variabelseparera

$$g''(t) + c^2k^2g(t) = 0$$

$$\Delta f - \frac{a}{S}f + k^2 f = 0$$

Separera igen. Ansätt $f(r,\varphi) = h(r)\Phi(\varphi)$.

$$\Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_m(\varphi) = A_m\cos m\varphi + B_m \sin m\varphi$$

$$\begin{cases} r^2h''(r) + rh'(r) + \left((k^2 - \frac{a}{S})r^2 - m^2\right)h(r) = 0 \\ h(R) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad h(r) = CJ_m(\mu r) + DY_m(\mu r), \quad \mu = \sqrt{k^2 - a/S}$$

$Y_m$ är singulär i origo $\Rightarrow D = 0$.

$$h(R) = 0 \quad \Rightarrow \quad J_m(\mu R) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{ms} = \frac{j_{ms}}{R}$$

Egensvängningarna blir (välj cos för tidsberoendet)

$$u_{ms}(r,\varphi,t) = J_m(\mu_{ms}r)\begin{matrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{matrix}\cos(ck_{ms}t), \quad k_{ms} = \sqrt{\mu_{ms}^2 + \frac{a}{S}}$$

Egenfrekvenserna är

$$\omega_{ms} = ck_{ms} = c\sqrt{\frac{j_{ms}^2}{R^2} + \frac{a}{S}}$$

5.15. Problemet lyder

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad c^2 = \frac{S}{\rho} \quad 0 \le r \le R \\ \text{RV} & -Su_r(R,t) = \kappa u(R,t) \end{array}$$

Grundsvängningen är cikulärsymmetrisk. Ansätt $u(r,t) = f(r)g(t)$ och variabelseparera.

$$g''(t) + c^2k^2g(t) = 0$$

$$\begin{cases} r^2f''(r) + rf'(r) + k^2r^2f(r) = 0 \\ -Sf'(R) = \kappa f(R) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(r) = AJ_0(kr) + BY_0(kr)$$

$Y_0$ är singulär i origo $\Rightarrow B = 0$. RV ger

$$-SkJ_0'(kR) = \kappa J_0(kR)$$

Kalla minsta lösningen till denna ekvation för $k_1$. Grundsvängningen blir (välj cos för tidsberoendet)

$$u(r,t) = J_0(k_1r)\cos(ck_1t)$$

Grundfrekvensen är $\omega = ck_1$. Numeriskt, då $\kappa = 10S/R$, blir $k_1 = 2{,}18/R$, dvs $\omega = 2{,}18c/R$.

5.16. Problemet lyder

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0 \qquad\qquad 0 \le r \le R \\ \text{RV} & \Phi_r(R,\varphi,t) = 0 \\ \text{BV} & \Phi(r,\varphi,0) = v_0 r\cos\varphi \\ & \Phi_t(r,\varphi,0) = 0 \end{array}$$

Inga svängningar i $z$-led uppstår eftersom det inte finns några krafter i $z$-led.

Ansätt $\Phi(\mathbf{r},t) = f(\mathbf{r})g(t)$ och variabelseparera.

$$g''(t) + c^2k^2g(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(t) = A\sin(ckt) + B\cos(ckt)$$

$$\Delta f(\mathbf{r}) + k^2f(\mathbf{r}) = 0$$

Separera igen. Ansätt $f(r,\varphi) = h(r)\Psi(\varphi)$.

$$\Psi''(\varphi) + m^2\Psi(\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Psi_m(\varphi) = C_m\cos m\varphi + D_m\sin m\varphi$$

Pga BV måste $m = 1$ och $\Psi(\varphi) = \cos\varphi$.

Ekvationen för $h(r)$ blir

$$\begin{cases} r^2h''(r) + rh'(r) + (k^2r^2 - m^2)h(r) = 0 \\ h'(R) = 0 \end{cases}$$

Lösning för $m = 1$:

$$h(r) = CJ_1(kr) + DY_1(kr)$$

$Y_1$ är singulär i origo $\Rightarrow D = 0$.

$$h'(R) = 0 \quad \Rightarrow \quad J_1'(kR) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_s = \frac{\eta_{1s}}{R}$$

Således $f_s(r, \varphi) = J_1(k_s r) \cos\varphi$ och

$$\Phi_s(r, \varphi, t) = f_s(r, \varphi) g_s(t) = J_1(k_s r) \cos\varphi (A_s \sin(ck_s t) + B_s \cos(ck_s t))$$

Superponera

$$\Phi(r, \varphi, t) = \sum_{s=1}^{\infty} J_1(k_s r) \cos\varphi (A_s \sin(ck_s t) + B_s \cos(ck_s t))$$

Anpassa till BV.

$$\begin{aligned}
\Phi_t(r, \varphi, 0) &= 0 = \sum_{s=1}^{\infty} A_s c k_s J_1(k_s r) \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad A_s = 0 \\
\Phi(r, \varphi, 0) &= v_0 r \cos\varphi = \sum_{s=1}^{\infty} B_s J_1(k_s r) \cos\varphi \\
\Rightarrow \quad B_s &= \frac{(h_s, v_0 r)}{\|h_s\|^2} = \frac{\int_0^R J_1(k_s r) v_0 r^2 dr}{\int_0^R J_1^2(k_s r) r\, dr} \\
&= \frac{v_0 \frac{R^3}{\eta_{1s}} J_2(\eta_{1s})}{\frac{R^2}{2} \left( \frac{\eta_{1s}^2 - 1}{\eta_{1s}^2} \right) J_1^2(\eta_{1s})}
\end{aligned}$$

Således

$$\Phi(r, \varphi, t) = 2 v_0 R \cos\varphi \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\eta_{1s} J_2(\eta_{1s})}{(\eta_{1s}^2 - 1) J_1^2(\eta_{1s})} J_1\left(\frac{\eta_{1s}}{R} r\right) \cos\left(\frac{c\eta_{1s}}{R} t\right)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} = \nabla\Phi = \; & 2 v_0 R \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\eta_{1s} J_2(\eta_{1s})}{(\eta_{1s}^2 - 1) J_1^2(\eta_{1s})} \cos\left(\frac{c\eta_{1s}}{R} t\right) \cdot \\
& \left( \frac{\eta_{1s}}{R} J_1'\left(\frac{\eta_{1s}}{R} r\right) \cos\varphi \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} J_1\left(\frac{\eta_{1s}}{R} r\right) \sin\varphi \mathbf{e}_\varphi \right)
\end{aligned}$$

## Påtvingade svängningar i cylinderkoordinater

5.17. Problemet lyder

$$\begin{array}{ll}
\text{PDE} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{g}{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left( A(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad 0 \le r \le R \\
\text{RV} & u(\ell, t) = a \cos\omega t
\end{array}$$

med $b(x) = b$ och $A(x) = bcx$.

Variabelbytet $y = \sqrt{x}$ ger ekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{4}{gc}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{RV: } u(\sqrt{\ell}, t) = a\cos\omega t$$

Ansätt $u(y,t) = f(y)\cos\omega t$. Detta ger

$$y^2 f''(y) + y f'(y) + \frac{4\omega^2}{gc} y^2 f(y) = 0$$

$$f(\sqrt{\ell}) = a$$

Bessels ekvation.

$$f(y) = BJ_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{gc}}y\right) + CY_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{gc}}y\right)$$

$Y_0$ är singulär i origo $\Rightarrow C = 0$. RV ger

$$BJ_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{gc}}\sqrt{\ell}\right) = a \quad \Rightarrow \quad B = \frac{a}{J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{gc}}\sqrt{\ell}\right)}$$

Således

$$u(x,t) = a\frac{J_0\left(2\omega\sqrt{x/(gc)}\right)}{J_0\left(2\omega\sqrt{\ell/(gc)}\right)}\cos\omega t$$

5.18. Problemet lyder

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{A}{S}\cos\omega t, \quad c^2 = \frac{S\pi R^2}{m} \quad 0 \le r \le R \\ \text{RV} & u(R,t) = 0 \end{array}$$

Ansätt $u(r,t) = f(r)\cos\omega t$. Det ger

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) + \frac{\omega^2}{c^2}f(r) = -\frac{A}{S}$$

$$f(R) = 0$$

Homogena lösningen är

$$f_h(r) = BJ_0\left(\frac{\omega}{c}r\right) + CY_0\left(\frac{\omega}{c}r\right)$$

$Y_0$ är singulär i origo $\Rightarrow C = 0$. Partikulärlösningen är

$$f_p(r) = -\frac{c^2 A}{\omega^2 S}$$

Således

$$f(r) = BJ_0\left(\frac{\omega}{c}r\right) - \frac{c^2A}{\omega^2 S}$$

RV ger

$$B = \frac{c^2A}{\omega^2 S J_0\left(\frac{\omega}{c}R\right)}$$

Således

$$u(r,t) = \frac{Ac^2}{S\omega^2}\left(\frac{J_0(\omega r/c)}{J_0(\omega R/c)} - 1\right)\cos\omega t$$

I mittpunkten ($r = 0$) är amplituden

$$\frac{Ac^2}{S\omega^2}\left(\frac{1}{J_0(\omega R/c)} - 1\right)$$

5.19. Elektriska fältet lyder problemet

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \Delta E(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \le r \le R \\ \text{RV} & E(a,\varphi,z,t) = 0 \\ & E(b,\varphi,z,t) = 0 \end{array}$$

Sätt in den givna ansatsen

$$E(\mathbf{r},t) = f(r,\varphi)e^{i(kz-\omega t)}$$

i ekvationen. Det ger följande ekvation,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)f(r,\varphi) = 0.$$

Ansätt

$$f(r,\varphi) = R_m(r)e^{im\varphi},$$

där $m$ är ett heltal. Det ger följande ekvation för $R_m(r)$,

$$R_m''(r) + \frac{1}{r}R_m'(r) - \frac{m^2}{r^2}R_m(r) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)R_m(r) = 0.$$

Låt $\mu^2 = \omega^2/c^2 - k^2$. För att anpassning till randvillkoren ska vara möjlig måste $\mu^2 > 0$. $R_m(r)$ blir

$$R_m(r) = A_m J_m(\mu r) + B_m Y_m(\mu r).$$

Randvillkoren ger

$$\begin{aligned} A_m J_m(\mu a) + B_m Y_m(\mu a) &= 0 \\ A_m J_m(\mu b) + B_m Y_m(\mu b) &= 0 \end{aligned}$$

Detta har en icketrivial lösning endast om

$$J_m(\mu a)Y_m(\mu b) - J_m(\mu b)Y_m(\mu a) = 0.$$

Kalla de olika lösningarna $\mu_{ms}$. Den lägsta lösningen är första lösningen för $m = 0$, $\mu_{01}$.

Enligt uppgiften ska $0 < k^2 = \omega^2/c^2 - \mu_{01}^2$, vilket leder till att

$$\omega > c\mu_{01}.$$

Det måste gälla att $k^2 > 0$, annars får vi en exponentiellt dämpad våg i $z$-led.

5.20. Problemet lyder

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \le r \le R, 0 \le z \le \ell \\ \text{RV} & u(R,\varphi,z,t) = A\cos\varphi\cos\omega t \\ & u(r,\varphi,0,t) = 0 \\ & u(r,\varphi,\ell,t) = 0 \end{array}$$

Ansätt $u(r,\varphi,z,t) = f(\mathbf{r})\cos\omega t$. Det ger

$$\Delta f + \frac{\omega^2}{c^2} f(\mathbf{r}) = 0$$

$$\text{RV:} \begin{cases} f(R,\varphi,z) = A\cos\varphi \\ f(r,\varphi,0) = 0 \\ f(r,\varphi,\ell) = 0 \end{cases}$$

Ansätt $f(r,\varphi,z) = g(r,\varphi)h(z)$ och separera igen

$$\frac{1}{g}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} + \frac{\omega^2}{c^2} g\right) = -\frac{h''(z)}{h(z)} = k^2$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} h''(z) + k^2 h(z) = 0 \\ h(0) = 0 \\ h(\ell) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad h_n(z) = \sin(k_n z), \quad k_n = \frac{n\pi}{\ell}$$

Ekvationen för $g$ blir

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_n^2\right) g(r,\varphi) = 0$$

Ansätt $g(r,\varphi) = \Psi(r)\Phi(\varphi)$ och variabelseparera.

$$\Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_m(\varphi) = B_m \sin m\varphi + C_m \cos m\varphi$$

$$r^2\Psi''(r)+r\Psi'(r)+\left((\frac{\omega^2}{c^2}-k_n^2)r^2-m^2\right)\Psi(r)=0$$

$$\Rightarrow\quad \Psi_{mn}(r)=D_1I_m(\mu_nr)+D_2K_m(\mu_nr),\quad \mu_n=\sqrt{k_n^2-\omega^2/c^2}$$

Kom ihåg att $\omega<c\pi/\ell$. $K_m$ är singulär i origo $\Rightarrow D_2=0$.

Superponera.

$$f(r,\varphi,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}I_m(\mu_nr)\sin(k_nz)(B_{mn}\cos m\varphi+C_{mn}\sin m\varphi)$$

Anpassa till RV.

$$f(R,\varphi,z)=A\cos\varphi=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}I_m(\mu_nR)\sin(k_nz)(B_{mn}\cos m\varphi+C_{mn}\sin m\varphi)$$

Vi ser att $B_{mn}=0$ då $m\neq 1$ och att $C_{mn}=0$. Vi får

$$\begin{aligned} A\cos\varphi &= \sum_{n=1}^{\infty}B_{1n}I_1(\mu_nR)\sin(k_nz)\cos\varphi \\ \Rightarrow\quad B_{1n} &= \frac{2A}{I_1(\mu_nR)\ell}\int_0^{\ell}\sin(k_nz)dz \\ &= \begin{cases} 4A/(I_1(\mu_nR)n\pi) & n \text{ udda} \\ 0 & n \text{ jämnt} \end{cases} \end{aligned}$$

Således

$$u(r,\varphi,z,t)=\frac{4A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{I_1(\mu_{2n+1}r)}{(2n+1)I_1(\mu_{2n+1}R)}\sin(k_{2n+1}z)\cos\varphi\cos\omega t$$

5.21. Problemet lyder

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \Delta u-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=0,\quad 0\le r\le R \\ \text{RV} & u(R,z,t)=0 \\ & u(r,0,t)=u_0e^{-i\omega t} \end{array}$$

Ansätt $u(\mathbf{r},t)=f(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$. Det ger

$$\Delta f+\frac{\omega^2}{c^2}f(\mathbf{r})=0$$

$$\text{RV:}\begin{cases} f(R,z)=0 \\ f(r,0)=u_0 \end{cases}$$

Ansätt $f(r,z)=\Psi(r)g(z)$ och variabelseparera.

$$g''(z)+k^2g(z)=0$$

$$r^2\Psi''(r) + r\Psi'(r) + \lambda^2 r^2 \Psi(r) = 0, \quad \lambda^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$$

RV kan bara uppfyllas om $\lambda^2 > 0$. Röret kan fungera som vågledare om någon partiallösning har periodiskt $z$-beroende, dvs om $k^2 > 0$ för något egenvärde $\lambda$. Vi finner att

$$\Psi_s(r) = J_0(\lambda_s r), \quad \lambda_s = \frac{j_{0s}}{R}$$

Lägsta egenvärde är $j_{01} = 2{,}4048$, dvs röret kan fungera som vågledare om

$$\omega > \omega_0 = j_{01}c/R = 2{,}4048c/R$$

Den allmänna lösningen har formen

$$u(r,z,t) = \sum_{s=1}^{N} A_s J_0(\lambda_s r) e^{ik_s z} e^{-i\omega t} + \sum_{s=N+1}^{\infty} A_s J_0(\lambda_s r) e^{-\kappa_s z} e^{-i\omega t}$$

där $N$ är det största $s$ med $j_{0s} < \omega R/c$ och

$$\kappa_s = \sqrt{\lambda_s^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Då $\omega$ är något större än $\omega_0$ är $N = 1$ och för stora $z$ ges amplituden i ett tvärsnitt av

$$A_1 J_0(\lambda_1 r)$$

där $A_1$ bestäms ur RV vid $z = 0$.

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{s=1}^{\infty} A_s J_0(\lambda_s r) \\ \Rightarrow \quad A_1 &= \frac{\int_0^R u_0 J_0(\lambda_1 r) r\, dr}{\int_0^R J_0^2(\lambda_1 r) r\, dr} \\ &= \frac{2u_0}{j_{01} J_1(j_{01})} = 1{,}60u_0 \end{aligned}$$

## Våg- och diffusionsekvationen i cylinderkoordinater

5.22. Problemet lyder

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \Delta u - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \\ \text{RV} & u(R,z,t) = T_0 \\ & u(r,0,t) = T_0 \\ & u(r,\ell,t) = T_0 \\ \text{BV} & u(r,z,0) = T_1 \end{array}$$

Ansätt $u(\mathbf{r},t) = T_0 + v(\mathbf{r},t)$. Då uppfyller $v(\mathbf{r},t)$

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \Delta v - \frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \\ \text{RV} & v(R,z,t) = 0 \\ & v(r,0,t) = 0 \\ & v(r,\ell,t) = 0 \\ \text{BV} & v(r,z,0) = T_1 - T_0 \end{array}$$

Ansätt $v(\mathbf{r},t) = f(\mathbf{r})g(t)$ och variabelseparera.

$$g'(t) + ak^2 g(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(t) = Ae^{-ak^2 t}$$

$$\Delta f + k^2 f = 0$$

$$\text{RV:} \begin{cases} f(R,z) = 0 \\ f(r,0) = 0 \\ f(r,\ell) = 0 \end{cases}$$

Ansätt $f(r,z) = \Psi(r)h(z)$ och separera igen.

$$\begin{cases} h''(z) + \lambda^2 h(z) = 0 \\ h(0) = 0 \\ h(\ell) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad h_n(z) = \sin(\lambda_n z), \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{\ell}$$

$$\begin{cases} r^2\Psi''(r) + r\Psi'(r) + \mu^2 r^2 \Psi(r) = 0 \\ \Psi(R) = 0 \end{cases} \qquad \mu^2 = k^2 - \lambda^2$$

$$\Rightarrow \quad \Psi(r) = BJ_0(\mu r) + CY_0(\mu r)$$

$Y_0$ är singulär i origo $\Rightarrow C = 0$. RV ger

$$J_0(\mu R) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_s = \frac{j_{0s}}{R}$$

Således

$$\Psi_s(r) = J_0\left(\frac{j_{0s}}{R}r\right)$$

Superponera.

$$v(r,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} A_{ns} J_0\left(\frac{j_{0s}}{R}r\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}z\right)e^{-ak_{ns}^2 t}$$

$$k_{ns}^2 = \mu_s^2 + \lambda_n^2 = \frac{j_{0s}^2}{R^2} + \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$$

Anpassa till BV.

$$v(r,z,0) = T_1 - T_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} A_{ns} J_0\left(\frac{j_{0s}}{R}r\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}z\right)$$

Låt $f_{ns}(r,z) = \Psi_s(r)h_n(z)$. Vi har en tvådimensionell fourierserie. Koefficienterna ges av

$$\begin{aligned} A_{ns} &= \frac{(f_{ns}, T_1 - T_0)}{\|f_{ns}\|^2} = (T_1 - T_0)\frac{\int_0^R \int_0^\ell J_0(\mu_s r)\sin(\lambda_n z) r\,dr\,dz}{\int_0^R \int_0^\ell J_0^2(\mu_s r)\sin^2(\lambda_n z) r\,dr\,dz} \\ &= \frac{4(T_1 - T_0)(1 - (-1)^n)}{n\pi j_{0s} J_1(j_{0s})} \end{aligned}$$

Således

$$u(r,z,t) = T_0 + \frac{8(T_1 - T_0)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{J_0(\mu_s r)}{(2n+1)j_{0s}J_1(j_{0s})}\sin(\lambda_{2n+1}z)e^{-ak_{2n+1,s}^2 t}$$

I cylinderns centrum är $r = 0$, $z = \ell/2$.

$$u(0,\ell/2,t) = T_0 + \frac{8(T_1 - T_0)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)j_{0s}J_1(j_{0s})}e^{-ak_{2n+1,s}^2 t}$$

5.23. Låt radien vara $R$ och längden $\ell$. Problemet lyder

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ \text{RV} & u_r(R,\varphi,z,t) = 0 \\ & u_z(r,\varphi,0,t) = 0 \\ & u_z(r,\varphi,\ell,t) = 0 \end{array}$$

Ansätt $u(\mathbf{r},t) = f(\mathbf{r})g(t)$ och variabelseparera.

$$g''(t) + c^2k^2 g(t) = 0$$

$$\Delta f(\mathbf{r}) + k^2 f(\mathbf{r}) = 0$$

Ansätt $f(r,\varphi,z) = h(r,\varphi)Z(z)$ och separera igen.

$$\left\{\begin{array}{l} Z''(z) + \lambda^2 Z(z) = 0 \\ Z'(0) = 0 \\ Z'(\ell) = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad Z_n(z) = \cos(\lambda_n z), \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{\ell}, \quad n = 0,1,2\dots$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2} + \mu^2 h(r,\varphi) = 0, \quad \mu^2 = k^2 - \lambda^2$$

Ansätt $h(r,\varphi) = \Psi(r)\Phi(\varphi)$ och separera igen.

$$\Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_m(\varphi) = A_m\cos m\varphi + B_m\sin m\varphi$$

$$\left\{\begin{array}{l} r^2\Psi''(r) + r\Psi'(r) + (\mu^2 r^2 - m^2)\Psi(r) = 0 \\ \Psi'(R) = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \Psi(r) = CJ_m(\mu r) + DY_m(\mu r)$$

$Y_m$ är singulär i origo $\Rightarrow D = 0$. RV ger

$$J_m'(\mu R) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{ms} = \frac{\eta_{ms}}{R}$$

Egensvängningarna blir (välj cos för $t$-beroendet)

$$u_{msn}(r,\varphi,z,t) = J_m(\mu_{ms} r)\cos(\lambda_n z) \begin{matrix}\sin m\varphi \\ \cos m\varphi\end{matrix} \cos(ck_{msn} t)$$

$$k_{msn}^2 = \mu_{ms}^2 + \lambda_n^2 = \left(\frac{\eta_{ms}}{R}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$$

Egenfrekvenser är

$$\omega_{msn} = c\sqrt{\left(\frac{\eta_{ms}}{R}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2}$$

$\omega_{010} = 0$, dvs ingen svängning. Degenererad grundfrekvens fås om $\omega_{011} = \omega_{110}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{\ell} = \frac{\eta_{11}}{R}$$

eller

$$\frac{R}{\ell} = \frac{\eta_{11}}{\pi} \approx 0{,}59$$

De tre första övertonerna blir

$$\omega_{111} = 1{,}41\omega_0, \quad \omega_{210} = 1{,}66\omega_0, \quad \omega_{211} = 1{,}96\omega_0$$

där $\omega_0$ är grundfrekvensen.

5.24. Problemet lyder

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \Delta u + \lambda u - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \\ \text{RV} & u(R,\varphi,z,t) = 0 \\ & u(r,\varphi,0,t) = 0 \\ & u(r,\varphi,\ell,t) = 0 \end{array}$$

Ansätt $u(\mathbf{r},t) = f(\mathbf{r})g(t)$ och variabelseparera.

$$g'(t) + a\mu g(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(t) = Ae^{-a\mu t}$$

$$\Delta f + (\lambda + \mu) f(\mathbf{r}) = 0$$

Villkoret för att ej få växande lösningar är att $\mu > 0$ för alla partiallösningar.
Ansätt $f(\mathbf{r}) = h(r,\varphi)Z(z)$ och separera igen.

$$\begin{cases} Z''(z) + k^2 Z(z) = 0 \\ Z(0) = 0 \\ Z(\ell) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Z_n(z) = \sin(k_n z), \quad k_n = \frac{n\pi}{\ell}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2} + (\lambda + \mu - k^2)h = 0$$

Ansätt $h(r,\varphi) = \Psi(r)\Phi(\varphi)$ och separera igen.

$$\Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_m(\varphi) = B_m \cos m\varphi + C_m \sin m\varphi$$

$$\begin{cases} r^2\Psi''(r) + r\Psi'(r) + (\sigma^2 r^2 - m^2)\Psi(r) = 0 \\ \Psi(R) = 0 \end{cases}, \quad \sigma^2 = \lambda + \mu - k^2$$

$$\Rightarrow \quad \Psi(r) = D_1 J_m(\sigma r) + D_2 Y_m(\sigma r)$$

$Y_m$ är singulär i origo $\Rightarrow D_2 = 0$. RV ger

$$J_m(\sigma R) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{ms} = \frac{j_{ms}}{R}$$

Vi får

$$\sigma_{ms} = \sqrt{\lambda + \mu - k_n^2}$$

eller

$$\mu_{msn} = \left(\frac{j_{ms}}{R}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 - \lambda$$

Minsta värdet fås för $m = 0$, $s = 1$, $n = 1$. Detta ska vara positivt dvs

$$\lambda < \left(\frac{j_{01}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2$$

## Laplaces ekvation i sfäriska koordinater

5.25. Problemet lyder

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \Delta V = 0 \\ \text{RV} & V(R_1,\theta) = 0 \\ & V(R_2,\theta) = V_0 \sin^2\theta \end{array}$$

Ansätt $V(r,\theta) = f(r)\Phi(\theta)$ och variabelseparera.

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \lambda\Phi(\theta) = 0$$

Lösningen är

$$\Phi_\ell(\theta) = P_\ell(\cos\theta), \quad \lambda_\ell = \ell(\ell+1)$$

Ekvationen för $f(r)$ blir

$$r^2 f''(r) + 2rf'(r) - \ell(\ell+1)f(r) = 0$$

Ansätt $f(r) = r^s$.

$$\Rightarrow \quad s(s-1)r^s + 2sr^s - \ell(\ell+1)r^s = 0$$

eller

$$s(s+1) - \ell(\ell+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \ell,\ s = -\ell - 1$$

Således

$$f_\ell(r) = A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}$$

Superponera.

$$V(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos\theta)$$

Anpassa till RV.

$$\begin{aligned}
V(R_1,\theta) &= 0 = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( A_\ell R_1^\ell + \frac{B_\ell}{R_1^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos\theta) \\
V(R_2,\theta) &= V_0 \sin^2\theta = V_0(1-\cos^2\theta) = \frac{2}{3} V_0 (P_0(\cos\theta) - P_2(\cos\theta)) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( A_\ell R_2^\ell + \frac{B_\ell}{R_2^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos\theta)
\end{aligned}$$

Vi ser att $A_\ell = 0$, $B_\ell = 0$ för $\ell \neq 0, 2$. De övriga blir

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{2R_2V_0}{3(R_2 - R_1)} \\
A_2 &= -\frac{2R_2^3V_0}{3(R_2^5 - R_1^5)} \\
B_0 &= -R_1 A_0 \\
B_2 &= -R_1^5 A_2
\end{aligned}$$

Således

$$V(r,\theta) = \frac{2R_2V_0}{3(R_2 - R_1)} \left( 1 - \frac{R_1}{r} \right) - \frac{2R_2^3V_0}{3(R_2^5 - R_1^5)} \left( r^2 - \frac{R_1^5}{r^3} \right) P_2(\cos\theta)$$

5.26. Problemet lyder

$$\begin{array}{ll}
\text{PDE} & \Delta u = 0 \\
\text{RV} & u(R,\theta) = T_0 + \frac{T_1}{2}(1 - \cos\theta)
\end{array}$$

Allmän $\varphi$-oberoende lösning är (se uppg. 5.25)

$$u(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos\theta)$$

$B_\ell = 0$ pga singularitet i origo. Anpassa till RV.

$$\begin{aligned} u(R,\theta) &= T_0 + \frac{T_1}{2}(1-\cos\theta) = \left(T_0 + \frac{T_1}{2}\right) P_0(\cos\theta) - \frac{T_1}{2} P_1(\cos\theta) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell R^\ell P_\ell(\cos\theta) \\ \Rightarrow \quad A_0 &= T_0 + \frac{T_1}{2} \\ A_1 &= -\frac{T_1}{2R} \end{aligned}$$

Således

$$u(r,\theta) = T_0 + \frac{T_1}{2} - T_1 \frac{r}{2R}\cos\theta$$

5.27. Vi ska lösa problemet

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \Delta V(r,\theta) = 0 \\ \text{RV} & V(a,\theta) = 0 \\ & V(r\to 0,\theta) = q\dfrac{3\cos^2\theta - 1}{r^3} = \dfrac{2qP_2(\cos\theta)}{r^3} \end{array}$$

Eftersom $P_\ell(\cos\theta)$ är egenfunktioner till vinkeldelen av laplaceoperatorn, ansätter vi

$$V_\ell(r,\theta) = \psi_\ell(r) P_\ell(\cos\theta).$$

Insatt i Laplaces ekvation ger detta

$$\frac{d^2\psi_\ell}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi_\ell}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\psi_\ell(r) = 0,$$

som har lösningen

$$\psi_\ell(r) = A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}.$$

Superponera:

$$V(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right) P_\ell(\cos\theta).$$

Randvillkoret

$$V(r\to 0,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta) = \frac{2qP_2(\cos\theta)}{r^3}$$

ger att

$$\begin{cases} B_\ell = 0, & \ell \neq 2 \\ B_2 = 2q \end{cases}$$

Randvillkoret

$$V(a,\theta) = \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell\neq 2}}^{\infty} A_\ell a^\ell P_\ell(\cos\theta) + \left(A_2 a^2 + \frac{2q}{a^3}\right) P_2(\cos\theta) = 0$$

ger att

$$\begin{cases} A_\ell = 0, & \ell \neq 2 \\ A_2 = -\dfrac{2q}{a^5} \end{cases}$$

Sammanfattningsvis blir lösningen

$$V(r,\theta) = 2q\left(\frac{1}{r^3} - \frac{r^2}{a^5}\right) P_2(\cos\theta).$$

5.28. Allmän $\varphi$-oberoende lösning är (se uppg. 5.25)

$$\Phi_i(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell^{(i)} r^\ell + \frac{B_\ell^{(i)}}{r^{\ell+1}}\right) P_\ell(\cos\theta)$$

$B_\ell^{(2)} = 0$ pga singularitet i origo. För $\Phi_0$ gäller $\Phi_0(r,\theta) = Er\cos\theta$ utanför sfären. Detta betyder att $A_1^{(0)} = E$, $A_\ell^{(0)} = 0$ då $\ell \neq 1$ och $B_\ell^{(0)} = 0$.

Vi har alltså

$$\begin{aligned} \Phi_0(r,\theta) &= Er\cos\theta \\ \Phi_1(r,\theta) &= \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell^{(1)} r^\ell + \frac{B_\ell^{(1)}}{r^{\ell+1}}\right) P_\ell(\cos\theta) \\ \Phi_2(r,\theta) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell^{(2)} r^\ell P_\ell(\cos\theta) \end{aligned}$$

Övriga RV ger för $\ell = 1$:

$$\begin{aligned} ER_1 &= A_1^{(1)} R_1 + \frac{B_1^{(1)}}{R_1^2} \\ \sigma_0 E &= \sigma_1\left(A_1^{(1)} - 2\frac{B_1^{(1)}}{R_1^3}\right) \\ A_1^{(1)} R_2 + \frac{B_1^{(1)}}{R_2^2} &= A_1^{(2)} R_2 \\ \sigma_1\left(A_1^{(1)} - 2\frac{B_1^{(1)}}{R_2^3}\right) &= \sigma_2 A_1^{(2)} \end{aligned}$$

Detta ekvationssystem har en lösning om

$$\sigma_0 = \sigma_1 \left( \frac{R_1^3(2\sigma_1 + \sigma_2) - 2R_2^3(\sigma_1 - \sigma_2)}{R_1^3(2\sigma_1 + \sigma_2) + R_2^3(\sigma_1 - \sigma_2)} \right)$$

5.29. Problemet lyder

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \Delta V = 0 \\ \text{RV} & V(R,\theta) = \alpha(\theta) = \begin{cases} V_0 & 0 \le \theta \le \pi/2 \\ -V_0 & \pi/2 \le \theta \le \pi \end{cases} \end{array}$$

Allmän $\varphi$-oberoende lösning är (se uppg. 5.25)

$$V(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos\theta)$$

Vi förutsätter att $V = 0$ då $r \to \infty \Rightarrow A_\ell = 0$.

Anpassa till RV:

$$\begin{aligned} V(R,\theta) &= \alpha(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{R^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta) \\ \Rightarrow \quad B_\ell &= R^{\ell+1} \frac{(P_\ell, \alpha)}{\|P_\ell\|^2} = R^{\ell+1} \frac{(2\ell+1)}{2} \int_0^\pi P_\ell(\cos\theta)\alpha(\theta)\sin\theta \, d\theta \end{aligned}$$

Den dominerande termen är den första nollskilda. Vi finner att $B_0 = 0$ och $B_1 = 3V_0R^2/2$. Alltså, för stora $r$ gäller

$$V(r,\theta) = \frac{3V_0}{2} \frac{R^2}{r^2} \cos\theta$$

5.30. I sfäriska koordinater är

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi$$

Villkoren $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r = 0$ för $r = R$ och $\mathbf{v} \to -v_\infty \mathbf{e}_z$ då $r \to \infty$ ger villkor på $\nabla\Phi$. Eftersom $\mathbf{e}_z = \cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta$ får vi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial r} = 0 & \text{då } r = R \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial r} \to v_\infty \cos\theta & \text{då } r \to \infty \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta} \to -v_\infty r \sin\theta & \text{då } r \to \infty \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \to 0 & \text{då } r \to \infty \end{cases}$$

$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ innebär att $\Phi$ uppfyller Laplaces ekvation. Symmetrin hos problemet antyder att $\Phi = \Phi(r, \theta)$. Vi ska lösa problemet:

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \Delta\Phi = 0 \\ \text{RV} & \text{enligt ovan} \end{array}$$

Den allmänna lösningen till $\Delta\Phi = 0$ är då

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos\theta)$$

Alltså

$$\begin{aligned} \nabla\Phi &= \mathbf{e}_r \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \ell A_\ell r^{\ell-1} - (\ell+1)\frac{B_\ell}{r^{\ell+2}} \right) P_\ell(\cos\theta) \\ &\quad + \mathbf{e}_\theta \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( A_\ell r^{\ell-1} + \frac{B_\ell}{r^{\ell+2}} \right) \frac{d}{d\theta} P_\ell(\cos\theta) \end{aligned}$$

RV ger nu att $A_\ell = B_\ell = 0$ för $\ell > 1$, $A_1 = v_\infty$, $B_1 = v_\infty R^3/2$, $B_0 = 0$ och $A_0$ godtycklig. Således

$$\Phi(r,\theta) = v_\infty \left( r + \frac{R^3}{2r^2} \right) \cos\theta + A_0$$

Hastighetsfältet blir

$$\mathbf{v} = -v_\infty \left( \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos\theta \mathbf{e}_r - \left( 1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \sin\theta \mathbf{e}_\theta \right)$$

5.31. Gravitationspotentialen definieras så att kraften på en massa $m_0$ i gravitationsfältet är

$$\mathbf{F} = -m_0 \nabla\Phi$$

och $\Phi$ uppfyller Laplaces ekvation i ett massfritt område. Potentialen på axeln blir

$$\Phi(z) = -\gamma \int_0^R \frac{dm(r)}{\sqrt{z^2+r^2}} = -\gamma \int_0^R \frac{M}{\pi R^2} \frac{2\pi r\, dr}{\sqrt{z^2+r^2}} = \frac{2\gamma M}{R^2}(|z| - \sqrt{z^2+R^2})$$

Den allmänna $\varphi$-oberoende lösningen till $\Delta\Phi = 0$ är

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos\theta)$$

Anpassa denna lösning till $\Phi$ på positiva $z$-axeln.

$z < R$:

$$\begin{aligned}
\Phi(z,0) &= \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell z^\ell + \frac{B_\ell}{z^{\ell+1}}\right)P_\ell(1) \\
&= \frac{2\gamma M}{R^2}\left(z - R\sqrt{1+\left(\frac{z}{R}\right)^2}\right) \\
&= \frac{2\gamma M}{R^2}\left(z - R\sum_{\ell=0}^{\infty}\binom{1/2}{\ell}\left(\frac{z}{R}\right)^{2\ell}\right)
\end{aligned}$$

Identifikation av koefficienterna ger att

$$A_1 = \frac{2\gamma M}{R^2}, \quad A_{2\ell} = -\frac{2\gamma M}{R^{2\ell+1}}\binom{1/2}{\ell}$$

Övriga $A_\ell = B_\ell = 0$. Alltså

$$\Phi(r,\theta) = \frac{2\gamma M}{R^2}\left(rP_1(\cos\theta) - R\sum_{\ell=0}^{\infty}\binom{1/2}{\ell}\left(\frac{r}{R}\right)^{2\ell}P_{2\ell}(\cos\theta)\right)$$

för $r < R$. För $z > R$ använder vi i stället utvecklingen

$$\Phi = \frac{2\gamma M}{R^2}z\left(1-\sqrt{1+\left(\frac{R}{z}\right)^2}\right) = -\frac{2\gamma M}{R^2}z\sum_{\ell=1}^{\infty}\binom{1/2}{\ell}\left(\frac{R}{z}\right)^{2\ell}$$

och får på samma sätt som ovan att

$$\Phi(r,\theta) = -\frac{2\gamma M}{R}\sum_{\ell=1}^{\infty}\binom{1/2}{\ell}\left(\frac{R}{r}\right)^{2\ell-1}P_{2\ell-2}(\cos\theta)$$

för $r > R$. Kontrollera gärna att $\Phi$ är kontinuerlig för $r = R$.

5.32. Vi ska lösa problemet (i sfäriska koordinater, oberoende av $\varphi$)

$$\begin{array}{ll}
\text{PDE} & \Delta\Phi(r,\theta) = 0 \\
\text{RV} & \Phi(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta, \qquad r\to\infty \\
& \sigma_i\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}(R-\epsilon) = \sigma_m\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}(R+\epsilon) \\
& \dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta}(R-\epsilon) = \dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta}(R+\epsilon)
\end{array}$$

Vi har för $r < R$

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}a_\ell\left(\frac{r}{R}\right)^\ell P_\ell(\cos\theta).$$

Vi har för $r > R$

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{ A_\ell \left(\frac{r}{R}\right)^{\ell} + B_\ell \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1} \right\} P_\ell(\cos\theta).$$

Första RV ger

$$A_1 = -E_0 R, \qquad A_\ell = 0 \text{ då } \ell \neq 1$$

Andra RV ger

$$\sigma_i a_\ell \frac{\ell}{R} = \sigma_m \left\{ -E_0 \delta_{\ell 1} - B_\ell \frac{\ell+1}{R} \right\}.$$

Tredje RV ger

$$a_\ell = -E_0 R \delta_{\ell 1} + B_\ell.$$

Dessa ekvationer ger

$$\begin{cases} a_1 = -\dfrac{3}{2 + \dfrac{\sigma_i}{\sigma_m}} E_0 R \\ A_1 = -E_0 R \\ B_1 = -\dfrac{1 - \dfrac{\sigma_i}{\sigma_m}}{2 + \dfrac{\sigma_i}{\sigma_m}} E_0 R \end{cases}$$

Övriga koefficienter försvinner. Lösningen blir

$$\Phi(r,\theta) = \begin{cases} -E_0 \dfrac{3}{2 + \dfrac{\sigma_i}{\sigma_m}} r\cos\theta, \qquad r < R \\ -E_0 \left\{ r\cos\theta + \dfrac{1 - \dfrac{\sigma_i}{\sigma_m}}{2 + \dfrac{\sigma_i}{\sigma_m}} \dfrac{R^3}{r^2} \cos\theta \right\}, \qquad r > R \end{cases}$$

5.33. Problemet lyder

$$\Delta u = 0$$

$$\text{RV:} \begin{cases} u(R,\theta) = T_1 \\ u(r,\pi/2) = 0 \end{cases}$$

Allmän $\varphi$-oberoende lösning är

$$u(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( A_\ell r^{\ell} + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos\theta)$$

$B_\ell = 0$ pga singularitet i origo. RV $u(r,\pi/2) = 0$ innebär att

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell r^{\ell} P_\ell(0) = 0$$

$\Rightarrow A_\ell = 0$ då $\ell$ är jämnt, ty $P_\ell(0) = 0$ endast då $\ell$ är udda. Det andra RV ger

$$\begin{aligned}
u(R,\theta) &= T_1 = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{2\ell+1} R^{2\ell+1} P_{2\ell+1}(\cos\theta) \\
\Rightarrow \quad A_{2\ell+1} &= \frac{(P_{2\ell+1}, T_1)}{R^{2\ell+1}\|P_{2\ell+1}\|^2} = \frac{T_1}{R^{2\ell+1}} \frac{\int_0^{\pi/2} P_{2\ell+1}(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta}{\int_0^{\pi/2} P_{2\ell+1}^2(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta} \\
\int_0^1 P_{2\ell+1}^2(x)dx &= \{P_{2\ell+1}(-x) = -P_{2\ell+1}(x)\} = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 P_{2\ell+1}^2(x)dx = \frac{1}{4\ell+3} \\
\int_0^1 P_{2\ell+1}(x)dx &= \frac{P_{2\ell+2}(1) - P_{2\ell}(1) - P_{2\ell+2}(0) + P_{2\ell}(0)}{4\ell+3} = \frac{P_{2\ell}(0) - P_{2\ell+2}(0)}{4\ell+3}
\end{aligned}$$

Således

$$u(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} T_1 \left(\frac{r}{R}\right)^{2\ell+1} (P_{2\ell}(0) - P_{2\ell+2}(0)) P_{2\ell+1}(\cos\theta)$$

## Sfäriska problem som är radiellt oberoende

5.34. Problemet lyder

$$\frac{1}{R^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Ansätt $u(\theta,\varphi,t) = f(\theta,\varphi)g(t)$ och variabelseparera.

$$\frac{1}{f(\theta,\varphi)}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)f = \frac{R^2}{c^2}\frac{g''}{g} = -\lambda$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)f(\theta,\varphi) + \lambda f(\theta,\varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f_{\ell m}(\theta,\varphi) = Y_{\ell m}(\theta,\varphi), \quad \lambda_{\ell m} = \ell(\ell+1)$$

Ekvationen för $g$ blir

$$g''_{\ell m}(t) + \frac{c^2}{R^2}\ell(\ell+1)g_{\ell m}(t) = 0$$

$$\Rightarrow \quad g_{\ell m}(t) = \cos\left(\frac{c}{R}\sqrt{\ell(\ell+1)}\,t\right) \quad \text{(t.ex.)}$$

Egensvängningarna blir

$$u_{\ell m}(\theta,\varphi,t) = Y_{\ell m}(\theta,\varphi)\cos\left(\frac{c}{R}\sqrt{\ell(\ell+1)}\,t\right)$$

Egenfrekvenserna blir

$$\omega_{\ell m} = \frac{c}{R}\sqrt{\ell(\ell+1)}$$

5.35. Problemet lyder

$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)n(\theta,\varphi,t)-\frac{1}{D_R}\frac{\partial n}{\partial t}=0$$

$$\text{BV: } n(\theta,\varphi,0)=\delta(\theta-\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\frac{1}{\sin\theta_0}=\beta(\theta,\varphi)$$

Ansätt $n(\theta,\varphi,t)=Y_{\ell m}(\theta,\varphi)g(t)$. Det ger

$$g'(t)+D_R\ell(\ell+1)g(t)=0 \quad \Rightarrow \quad g_{\ell m}(t)=A_{\ell m}e^{-D_R\ell(\ell+1)t}$$

Superponera.

$$n(\theta,\varphi,t)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}A_{\ell m}Y_{\ell m}(\theta,\varphi)e^{-D_R\ell(\ell+1)t}$$

Anpassa till BV.

$$\begin{aligned} n(\theta,\varphi,0) &= \beta(\theta,\varphi)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}A_{\ell m}Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \\ \Rightarrow \quad A_{\ell m} &= \frac{(Y_{\ell m},\beta)}{\|Y_{\ell m}\|^2}=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}Y^*_{\ell m}(\theta,\varphi)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\frac{\sin\theta}{\sin\theta_0}d\theta\,d\varphi \\ &= Y^*_{\ell m}(\theta_0,\varphi_0) \end{aligned}$$

Således

$$n(\theta,\varphi,t)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}Y^*_{\ell m}(\theta_0,\varphi_0)Y_{\ell m}(\theta,\varphi)e^{-D_R\ell(\ell+1)t}$$

Väntevärdet

$$\begin{aligned} \langle P_\ell(\cos\alpha)\rangle &= \int d\Omega\,d\Omega_0\,P_\ell(\cos\alpha)n(\theta,\varphi,t) \\ &= \int d\Omega\,d\Omega_0\frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell}Y^*_{\ell m}(\theta,\varphi)Y_{\ell m}(\theta_0,\varphi_0) \\ &\quad \times\sum_{\ell'=0}^{\infty}\sum_{m'=-\ell'}^{\ell'}Y^*_{\ell' m'}(\theta_0,\varphi_0)Y_{\ell' m'}(\theta,\varphi)e^{-D_R\ell'(\ell'+1)t} \\ &= \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\sum_{\ell'=0}^{\infty}\sum_{m'=-\ell'}^{\ell'}\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}e^{-D_R\ell'(\ell'+1)t} \\ &= \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell}e^{-D_R\ell(\ell+1)t} \\ &= 4\pi e^{-D_R\ell(\ell+1)t} \end{aligned}$$

## Våg- och diffusionsekvationen i sfäriska koordinater

5.36. Problemet lyder

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \Delta u - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \\ \text{RV} & u(R,t) = T_1 \\ \text{BV} & v(r,0) = T_0 - T_1 \end{array}$$

Ansätt $v(r,t) = f(r)g(t)$ och variabelseparera.

$$g'(t) + ak^2 g(t) = 0, \quad \Rightarrow \quad g(t) = Ae^{-ak^2 t}$$

$$\begin{cases} r^2 f''(r) + 2rf'(r) + k^2 r^2 f(r) = 0 \\ f(R) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(r) = Bj_0(kr) + Cn_0(kr)$$

$n_0$ är singulär i origo $\Rightarrow C = 0$. RV $f(R) = 0$ ger

$$j_0(kR) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(kR) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_n = \frac{n\pi}{R}$$

Superponera.

$$v(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n j_0\left(\frac{n\pi}{R} r\right) e^{-ak_n^2 t}$$

Anpassa till BV.

$$\begin{array}{rcl} v(r,0) & = & T_0 - T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n j_0(k_n r) \\ \Rightarrow \quad A_n & = & \dfrac{(f_n, T_0 - T_1)}{\|f_n\|^2} = \dfrac{\int_0^R j_0(k_n r)(T_0 - T_1) r^2 dr}{\int_0^R j_0^2(k_n r) r^2 dr} \\ & = & 2(-1)^n (T_1 - T_0) \end{array}$$

Kom ihåg att $j_0(x) = \sin x / x$. Således

$$u(r,t) = T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^n (T_1 - T_0) j_0(k_n r) e^{-ak_n^2 t}$$

I medelpunkten blir temperaturen

$$u(0,t) \approx T_1 - 2(T_1 - T_0) e^{-ak_1^2 t}$$

Koktiden blir

$$t = \frac{R^2}{\pi^2 a} \ln\left(\frac{2(T_1 - T_0)}{T_1 - T_2}\right)$$

5.37. Problemet lyder

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \\ \text{RV} & \Phi_r(R,\theta,t) = 0 \\ \text{BV} & \Phi(r,\theta,0) = vr\cos\theta \\ \text{BV} & \Phi_t(r,\theta,0) = 0 \end{array}$$

Ansätt $\Phi(\mathbf{r},t) = f(\mathbf{r})g(t)$ och variabelseparera.

$$g''(t) + c^2k^2g(t) = 0, \quad g(t) = A\sin(ckt) + B\cos(ckt)$$

$$\Delta f + k^2 f = 0$$

Ansätt $f(\mathbf{r}) = \Psi(r)h(\theta)$ och separera igen.

$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right)h(\theta) + \ell(\ell+1)h(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad h_\ell(\theta) = P_\ell(\cos\theta)$$

$$\begin{cases} r^2\Psi''(r) + 2r\Psi'(r) + (k^2r^2 - \ell(\ell+1))\Psi(r) = 0 \\ \Psi'(R) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \Psi(r) = Cj_\ell(kr) + Dn_\ell(kr)$$

$n_\ell$ är singulär i origo $\Rightarrow D = 0$. RV $\Psi'(R) = 0$ ger

$$j'_\ell(kR) = 0, \quad \Rightarrow \quad k_{\ell s} = \frac{\zeta_{\ell s}}{R}$$

Superponera.

$$\Phi(r,\theta,t) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} j_\ell(k_{\ell s}r)P_\ell(\cos\theta)(A_{\ell s}\sin(ck_{\ell s}t) + B_{\ell s}\cos(ck_{\ell s}t))$$

Anpassa till BV: $\Phi_t(r,\theta,0) = 0 \Rightarrow A_{\ell s} = 0$.

$$\begin{aligned} \Phi(r,\theta,0) &= vr\cos\theta = vrP_1(\cos\theta) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} B_{\ell s}j_\ell(k_{\ell s}r)P_\ell(\cos\theta) \end{aligned}$$

Vi ser att $B_{\ell s} = 0$ då $\ell \neq 1$ och att

$$\begin{aligned} B_{1s} &= \frac{(\Psi_{1s}, vr)}{\|\Psi_{1s}\|^2} = v\frac{\int_0^R j_1(k_{1s}r)r^3dr}{\int_0^R j_1^2(k_{1s}r)r^2dr} \\ &= \frac{R^4 j_2(\zeta_{1s})}{\zeta_{1s}}\frac{2}{R^3(1-2/\zeta_{1s}^2)j_1^2(\zeta_{1s})} = \frac{2Rj_2(\zeta_{1s})\zeta_{1s}}{(\zeta_{1s}-2)j_1^2(\zeta_{1s})} \end{aligned}$$

Således

$$\Phi(r,\theta,t) = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{2Rj_2(\zeta_{1s})\zeta_{1s}}{(\zeta_{1s}-2)j_1^2(\zeta_{1s})}j_1(k_{1s}r)\cos\theta\cos(ck_{1s}t)$$

och

$$\mathbf{v}(\mathbf{r},t) = \nabla\Phi = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{2Rj_2(\zeta_{1s})\zeta_{1s}}{(\zeta_{1s}-2)j_1^2(\zeta_{1s})}\cos(ck_{1s}t)\left(\mathbf{e}_r\frac{\zeta_{1s}}{R}j'_1(k_{1s}r)\cos\theta - \mathbf{e}_\theta\frac{j_1(k_{1s}r)}{r}\sin\theta\right)$$

5.38. a) Problemet lyder

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda u(r,t) - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \\ \text{RV} & u(R,t) = 0 \end{array}$$

Ansätt $u(r,t) = f(r)g(t)$ och variabelseparera.

$$g'(t) + a(k^2 - \lambda)g(t) = 0, \quad g(t) = e^{-a(k^2-\lambda)t}$$

$$\begin{cases} r^2 f''(r) + 2rf'(r) + k^2 r^2 f(r) = 0 \\ f(R) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad f(r) = Aj_0(kr) + Bn_0(kr)$$

$n_0$ är singulär i origo $\Rightarrow B = 0$. RV $f(R) = 0$ ger

$$j_0(kR) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(kR) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_n = \frac{n\pi}{R}$$

$u$ växer exponentiellt om $k_n^2 - \lambda < 0$ för något $n$. $n = 1$ ger minsta värdet.

$$\Rightarrow \quad R > \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$$

Den kritiska radien är således

$$R_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$$

b) Problemet lyder

$$\begin{array}{lll} \text{PDE} & \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} + \lambda u(r) = 0 & \\ \text{RV} & u(R) = 0 & \\ & ru(r) \to N/(4\pi a) & \text{då } r \to 0 \end{array}$$

Lösningen är

$$u(r) = Aj_0(\sqrt{\lambda}r) + Bn_0(\sqrt{\lambda}r) = A'\frac{\sin(\sqrt{\lambda}r)}{r} + B'\frac{\cos(\sqrt{\lambda}r)}{r}$$

RV vid $r = 0$ ger

$$B' = \frac{N}{4\pi a}$$

RV $u(R) = 0$ ger

$$A' = -\frac{N}{4\pi a}\cot(\sqrt{\lambda}R)$$

Således

$$u(r) = \frac{N}{4\pi ar}(-\cot(\sqrt{\lambda}R)\sin(\sqrt{\lambda}r) + \cos(\sqrt{\lambda}r))$$

Neutronflödet är

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_N &= -a\nabla u = -a\frac{du}{dr}\mathbf{e}_r \\ &= \frac{N}{4\pi r}\left(\cot(\sqrt{\lambda}R)\left(\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}r) - \frac{\sin(\sqrt{\lambda}r)}{r}\right) + \sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}r) + \frac{\cos(\sqrt{\lambda}r)}{r}\right)\mathbf{e}_r\end{aligned}$$

På ytan $r = R$ är

$$\mathbf{J}_N = \frac{N\sqrt{\lambda}}{4\pi R\sin(\sqrt{\lambda}R)}\mathbf{e}_r$$

Flödet blir

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_S \mathbf{J}_N \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{N\sqrt{\lambda}}{4\pi R\sin(\sqrt{\lambda}R)}\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r dS \\ &= \frac{NR\sqrt{\lambda}}{\sin(\sqrt{\lambda}R)}\end{aligned}$$

Ur denna ekvation kan $\lambda$ bestämmas. Sedan kan $R_0 = \pi/\sqrt{\lambda}$ beräknas.

5.39. Vi ska lösa problemet

$$\begin{array}{ll}\text{PDE} & \Delta u - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ \text{RV} & u(R,\theta,t) = T_0\cos\theta \\ \text{BV} & u(r,\theta,0) = 0\end{array}$$

Ansatsen $u(r,\theta,t) = f(r)\cos\theta + v(r,\theta,t)$ insatt i ekvationen ger

$$\left(f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) - \frac{2}{r^2}f(r)\right)\cos\theta + \Delta v - \frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

Låt

$$\begin{cases} r^2 f''(r) + 2rf'(r) - 2f(r) = 0 \\ f(R) = T_0 \end{cases}$$

Detta har lösningen

$$f(r) = \frac{T_0}{R}r.$$

Detta leder till följande problem för $v(r,\theta,t)$,

$$\begin{array}{ll}\text{PDE} & \Delta v - \frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \\ \text{RV} & v(R,\theta,t) = 0 \\ \text{BV} & v(r,\theta,0) = -\frac{T_0}{R}r\cos\theta\end{array}$$

Nu är det dags att variabelseparera. Vi ansätter

$$v(r,\theta,t) = g(r)h(t)P_\ell(\cos\theta).$$

Variabelseparation ger

$$\begin{cases} r^2 g''(r) + 2rg'(r) + (k^2r^2 - \ell(\ell+1))g(r) = 0 \\ g(R) = 0 \end{cases}$$

$g(r)$ blir

$$g(r) = Aj_\ell(kr) + Bn_\ell(kr).$$

$n_\ell$ är singulär i origo $\Rightarrow B = 0$. Randvillkoret $g(R) = 0$ medför att

$$j_\ell(kR) = 0, \quad \Rightarrow \quad k_{\ell s} = \frac{\xi_{\ell s}}{R}, \quad s = 1, 2, 3 \ldots \quad \xi_{\ell s} = \text{ nollställe nr } s \text{ till } j_\ell$$

För $h_{\ell s}(t)$ får vi ekvationen

$$h'_{\ell s}(t) + ak_{\ell s}^2 h_{\ell s}(t) = 0,$$

som har lösningen

$$h_{\ell s}(t) = A_{\ell s} e^{-ak_{\ell s}^2 t}.$$

Superponera lösningarna,

$$v(r, \theta, t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} A_{\ell s} j_\ell(k_{\ell s} r) P_\ell(\cos\theta) e^{-ak_{\ell s}^2 t}.$$

Begynnelsevillkoret ger oss

$$v(r, \theta, 0) = -\frac{T_0}{R} r\cos\theta = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} A_{\ell s} j_\ell(k_{\ell s} r) P_\ell(\cos\theta).$$

Eftersom $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$ är $A_{\ell s} = 0$ då $\ell \neq 1$. Således blir

$$v(r, \theta, 0) = -\frac{T_0}{R} r\cos\theta = \cos\theta \sum_{s=1}^{\infty} A_{1s} j_1(k_{1s} r).$$

Vi har en fourierserie med basfunktionerna $j_1(k_{1s}r)$. Koefficienterna ges av

$$A_{1s} = \frac{-\dfrac{T_0}{R}\displaystyle\int_0^R j_1(k_{1s}r) r^3\, dr}{\displaystyle\int_0^R (j_1(k_{1s}r))^2 r^2\, dr} = \frac{-\dfrac{T_0 R^3}{\xi_{1s}^4}\displaystyle\int_0^{\xi_{1s}} \frac{d}{dx}(x^3 j_2(x))\, dx}{\dfrac{R^3}{2}(j_1'(\xi_{1s}))^2} = -\frac{2T_0 j_2(\xi_{1s})}{\xi_{1s}(j_1'(\xi_{1s}))^2}$$

Sammanfattningsvis blir lösningen

$$u(r, \theta, t) = \frac{T_0}{R} r\cos\theta - 2T_0\cos\theta \sum_{s=1}^{\infty} \frac{j_2(\xi_{1s})}{\xi_{1s}(j_1'(\xi_{1s}))^2} j_1(\xi_{1s} r/R) e^{-a\xi_{1s}^2 t/R^2}.$$

## Påtvingade svängningar i sfäriska koordinater

5.40. Problemet lyder

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ \text{RV} & u(R,\theta,t) = A\cos^3\theta\cos\omega t \end{array}$$

Ansätt $u(\mathbf{r},t) = f(\mathbf{r})\cos\omega t$. Detta ger

$$\Delta f + \frac{\omega^2}{c^2} f(\mathbf{r}) = 0$$

$$\text{RV: } f(R,\theta) = A\cos^3\theta$$

Ansätt $f(r,\theta) = \Psi(r)\Phi(\theta)$ och variabelseparera.

$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right)\Phi(\theta) + \ell(\ell+1)\Phi(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_\ell(\theta) = P_\ell(\cos\theta)$$

$$r^2\Psi''(r) + 2r\Psi'(r) + \left(\frac{\omega^2}{c^2}r^2 - \ell(\ell+1)\right)\Psi(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Psi(r) = Bj_\ell\left(\frac{\omega}{c}r\right) + Cn_\ell\left(\frac{\omega}{c}r\right)$$

$n_\ell$ är singulär i origo $\Rightarrow C = 0$. Superponera.

$$f(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell j_\ell\left(\frac{\omega}{c}r\right)P_\ell(\cos\theta)$$

Anpassa till RV.

$$\begin{array}{rrcl} & f(R,\theta) & = & A\cos^3\theta \\ & & = & \frac{3A}{5}P_1(\cos\theta) + \frac{2A}{5}P_3(\cos\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell j_\ell\left(\frac{\omega}{c}R\right)P_\ell(\cos\theta) \\ \Rightarrow & B_1 & = & \frac{3A}{5j_1(\omega R/c)} \\ & B_3 & = & \frac{2A}{5j_3(\omega R/c)} \\ & B_\ell & = & 0, \quad \ell \neq 1, \ell \neq 3 \end{array}$$

Således

$$u(r,\theta,t) = \left(\frac{3A}{5}\frac{j_1(\omega r/c)}{j_1(\omega R/c)}P_1(\cos\theta) + \frac{2A}{5}\frac{j_3(\omega r/c)}{j_3(\omega R/c)}P_3(\cos\theta)\right)\cos\omega t$$

## Serieutveckling av inhomogeniteter

5.41. Problemet lyder

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} = -Ae^{-\mu t} \\ \text{RV} & u(R,t) = 0 \\ \text{BV} & u(r,0) = 0 \end{array}$$

Utveckla $u$ i egenfunktioner till problemet

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dv}{dr} + k^2 v(r) = 0$$

$$\text{RV: } v(R) = 0$$

Lösningen till denna ekvation är

$$v(r) = Bj_0(kr) + Cn_0(kr)$$

$n_0$ är singulär i origo $\Rightarrow C = 0$. RV $v(R) = 0$ ger

$$j_0(kR) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(kR) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_n = \frac{n\pi}{R}$$

Egenfunktionerna är

$$v_n(r) = \frac{\sin(k_n r)}{r}$$

Utveckla

$$\begin{aligned} -Ae^{-\mu t} &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) v_n(r) \\ f_n(t) &= \frac{(v_n, -Ae^{-\mu t})}{\|v_n\|^2} = -Ae^{-\mu t} \frac{\int_0^R \sin(k_n r) r\, dr}{\int_0^R \sin^2(k_n r) dr} \\ &= \frac{2AR(-1)^n}{\pi n} e^{-\mu t} \end{aligned}$$

Ansätt

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) v_n(r)$$

Insatt i ekvationen för $u$ ger detta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-k_n^2 g_n(t) - \frac{1}{a} g_n'(t)\right) v_n(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2AR(-1)^n}{\pi n} e^{-\mu t} v_n(r)$$

Termvis likhet ger följande lösning för $g_n(t)$:

$$g_n(t) = A_n e^{-a k_n^2 t} + \frac{(-1)^n 2AR}{n\pi\left(\frac{\mu}{a} - k_n^2\right)} e^{-\mu t}$$

BV $u(r,0) = 0$ ger

$$A_n = -\frac{(-1)^n 2AR}{n\pi\left(\frac{\mu}{a} - k_n^2\right)}$$

Således

$$u(r,t) = \frac{2AR}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\left(\frac{\mu}{a} - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2\right)}\left(e^{-\mu t} - e^{-a(n\pi/R)^2 t}\right)\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{R}r\right)}{r}$$

5.42. Problemet lyder

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & \Delta V = -\frac{q}{\epsilon_0}\sin\left(\frac{\pi r}{R}\right)\cos\theta \\ \text{RV} & V(R,\theta) = 0 \end{array}$$

Ansätt $V(r,\theta) = f(r)\cos\theta$. Detta ger

$$f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) - \frac{2}{r^2}f(r) = -\frac{q}{\epsilon_0}\sin\left(\frac{\pi r}{R}\right)$$

$$\text{RV: } f(R) = 0$$

Utveckla $f(r)$ i egenfunktioner till problemet

$$v''(r) + \frac{2}{r}v'(r) - \frac{2}{r^2}v(r) + k^2 v(r) = 0$$

$$\text{RV: } v(R) = 0$$

Lösningen till denna ekvation är

$$v(r) = Bj_1(kr) + Cn_1(kr)$$

$n_1$ är singulär i origo $\Rightarrow C = 0$. RV $v(R) = 0$ ger

$$j_1(kR) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_s = \frac{\xi_{1s}}{R}$$

Egenfunktionerna är

$$v_s(r) = j_1\left(\frac{\xi_{1s}}{R}r\right)$$

Utveckla

$$\begin{aligned} -\frac{q}{\epsilon_0}\sin\left(\frac{\pi r}{R}\right) &= \sum_{s=1}^{\infty} c_s v_s(r) \\ \Rightarrow \quad c_s &= -\frac{q}{\epsilon_0}\frac{\int_0^R \sin\left(\frac{\pi r}{R}\right) j_1(k_s r) r^2 dr}{\int_0^R j_1^2(k_s r) r^2 dr} \\ &= -\frac{2\pi q R^3 \xi_{1s}\cos(\xi_{1s})}{\epsilon_0(\xi_{1s}^2 - \pi^2)^2}\frac{2}{R^3(j_1'(\xi_{1s}))^2} = -\frac{4\pi q\xi_{1s}\cos(\xi_{1s})}{\epsilon_0(\xi_{1s}^2 - \pi^2)^2(j_1'(\xi_{1s}))^2} \end{aligned}$$

Ansätt

$$f(r) = \sum_{s=1}^{\infty} a_s v_s(r)$$

Insatt i ekvationen för $f(r)$ ger detta

$$\sum_{s=1}^{\infty} -a_s \frac{\xi_{1s}^2}{R^2} v_s(r) = \sum_{s=1}^{\infty} c_s v_s(r)$$

$$\Rightarrow a_s = -\frac{R^2 c_s}{\xi_{1s}^2}$$

Således

$$V(r,\theta) = \frac{q}{\epsilon_0} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{4R^2 \pi \cos(\xi_{1s})}{\xi_{1s}(\xi_{1s}^2 - \pi^2)^2 (j_1'(\xi_{1s}))^2} j_1\left(\frac{\xi_{1s}}{R} r\right) \cos\theta$$